



# دومین سمینار تخصصی نظریه قابلیت اعتماد و کاربردهای آن

۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۵

دانشگاه تهران

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

$$f(t) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right) \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$$



تلفن: ۰۲۱-۶۱۱۱۲۶۱۳ فکس: ۰۲۱-۶۶۴۱۲۱۷۸ وبسایت: <http://wosdce.um.ac.ir>

آدرس: خیابان ۱۶ آذر - دانشگاه تهران - پردیس علوم



دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن  
۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۵



مجموعه مقالات

دومین سمینار تخصصی

# نظریه قابلیت اعتماد و کاربردهای آن

گروه آمار

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

دانشگاه تهران

با همکاری

انجمن آمار ایران

قطب علمی داده های ترتیبی و فضایی

پژوهشکده آمار

پژوهشگاه هوافضا

۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ماه ۱۳۹۵

خداوند منان را شاکریم که این توفیق را به برگزارکنندگان دومین سمینار تخصصی "نظریه قابلیت اعتماد و کاربردهای آن" داد تا جمعی از پژوهشگران و علاقه‌مندان به مباحث قابلیت اعتماد را در سمیناری ۲ روزه در دانشگاه تهران گرد هم آورند. این سمینار به دنبال برگزاری موفقیت‌آمیز سه کارگاه تخصصی در زمینه قابلیت اعتماد در سال‌های اخیر و اولین سمینار تخصصی "نظریه قابلیت اعتماد و کاربردهای آن" که در اردیبهشت ماه ۱۳۹۴ در دانشگاه اصفهان با همکاری "قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی" دانشگاه فردوسی مشهد برگزار گردید، برگزار می‌گردد. امروزه مبحث قابلیت اعتماد به عنوان یکی از شاخه‌های بین رشته‌ای در آمار و مهندسی از اهمیت فراوانی در پیشبرد تکنولوژی برخوردار است. هدف از برگزاری این سمینار تخصصی فراهم نمودن بستری مناسب برای ارائه پژوهش‌های اعضای هیات علمی و دانشجویان تحصیلات تکمیلی در زمینه‌های مختلف این شاخه علمی است. به‌ویژه پیشرفت‌های صورت گرفته در کشور در زمینه روش‌های ریاضی در قابلیت اعتماد به صورت سخنرانی عمومی، تخصصی و نمایش پوستر توسط مدعوین و شرکت‌کنندگان ارائه می‌گردد. لازم به ذکر است که پس از فراخوان سمینار، مقالات دریافت شده توسط اعضای کمیته علمی و کمیته داوران سمینار مورد ارزیابی و در نهایت ۴۶ مقاله به صورت سخنرانی و ۲۸ مقاله به صورت پوستر مورد پذیرش قرار گرفت. در پایان لازم می‌دانم از کمیته علمی، کمیته اجرایی و کمیته داوران سمینار نهایت تشکر و سپاسگزاری را داشته باشم. همچنین مراتب قدردانی خود را از ریاست محترم پردیس علوم و ریاست محترم دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر دانشگاه تهران، معاونت محترم پژوهشی پژوهشکده هوافضا و ریاست محترم پژوهشکده آمار اعلام نمایم. از خداوند منان آرزوی توفیق تمامی کسانی که در برگزاری این سمینار ما را یاری نمودند، دارم.

فیروزه حقیقی  
دبیر سمینار

### اعضای کمیته علمی (به ترتیب حروف الفبا):

- دکتر جعفر احمدی، دانشگاه فردوسی مشهد
- دکتر مجید اسدی، دانشگاه اصفهان
- دکتر احمد پارسیان، دانشگاه تهران
- دکتر فیروزه حقیقی، دانشگاه تهران (دبیر سمینار)
- دکتر بهاءالدین خالدی، دانشگاه رازی
- دکتر احمد خدادادی، دانشگاه شهید بهشتی
- دکتر اسماعیل خرم، دانشگاه صنعتی امیرکبیر
- دکتر محمد علی فارسی، پژوهشگاه هوافضا
- دکتر رسول نورالسنا، دانشگاه علم و صنعت ایران
- دکتر علی همدانی، دانشگاه صنعتی اصفهان

### اعضای کمیته اجرایی (به ترتیب حروف الفبا):

- دکتر سید مرتضی امینی، دانشگاه تهران
- دکتر حمید پزشک، دانشگاه تهران
- دکتر هادی جباری نوقابی، دانشگاه فردوسی مشهد
- دکتر سودابه شمه سوار، دانشگاه تهران (دبیر اجرایی)

### محورهای سمینار:

- استنباط آماری داده‌های قابلیت اعتماد
- آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته
- الگوهای تعمیر و نگهداری سیستم‌ها
- قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم
- ترتیب‌های تصادفی در قابلیت اعتماد
- مدل‌های تنش - مقاومت
- قابلیت اعتماد شبکه‌ها
- مفاهیم سالخوردگی
- قابلیت اعتماد داده‌های فرسایشی
- تحلیل بقاء
- کنترل کیفیت و قابلیت اطمینان
- نظریه اطلاع و قابلیت اعتماد

# فهرست

۱	اندازه اطلاع نمونه در مورد پارامتر و پیش بین آقای رشتی، م. ....
۶	مفاهیم سالخوردهگی و ارتباط آنها با شاخص های نابرابری بهدانی. ز.، محتشمی برزادران، غ.، صادقپور گیلده، ب. ....
۱۰	سانسور پیش رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته بیات، م.، ترابی، ح. ....
۱۵	آنترپی گذشته تجمعی پویا موسوی جباری، ف.، عباس نژاد مشهدی، م. ....
۱۹	دو آزمون نیکویی برازش پایای شکل-مقیاس برای داده های سانسور شده ی چپ خدادوستان، س.، ترابی، ح.، میرحسینی، س. ....
۲۵	ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم رادار با استفاده از توزیع کاماراسوامی رسولی، ع.، مهدیون، ف.، خدابنده لو، ص. ....
۳۲	برآورد قابلیت اعتماد در توزیع وایبل نمایی شده با استفاده از روش باز نمونه گیری خودگردان حیدری، س.، قربان پور، ف. ....
۳۹	بررسی قابلیت اعتماد $G$ سیستم های ۱ از $N$ با مؤلفه های آماده باش داغ و سرد از نقطه نظر هزینه عبدی، ف. ....
۴۳	یک آزمون پرتوان تر برای مقایسه ی میانگین های دو جامعه ی پواسن فرهادی، ا.، چینی پرداز، ر.، آخوند، م. ....
۴۷	نتایجی از طول عمر سیستم ها با مؤلفه های مستقل و غیرهم توزیع کاظمپور، ج.، براتپور، س. ....
۵۱	مروری بر قابلیت اعتماد چندکی کنارنگی، ط.، رزمخواه، م. ....
۵۶	معرفی خانواده دو متغیره فارلی-گامبل-مورگنسترن-نمایی-بتا مرزبان، نسترن.، محمودی، عیسی.، ترابی، حمزه. ....

- طراحی یک آزمون شتاب دهنده جزئی با در نظر گرفتن سانسور نوع اول برای برآورد پارامترهای تابع توزیع احتمال طول عمر مشاهدات  
 ۶۱ ..... رمضان، ر.، رمضان، م.
- مدل سازی قابلیت اطمینان سیستم های مکانیکی با چند مد خرابی و با در نظر گرفتن متغیرهای پایشی  
 ۶۵ ..... رمضان، ر.
- بهینه سازی طرح های نمونه گیری گروهی سانسور شده فزاینده  
 ۶۹ ..... سعیدی مفرد، م.، توانگر، م.
- توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته و کاربرد آن در قابلیت اطمینان شفیع زاده، آ.  
 ۷۷ .....
- مدل سازی توأم داده های بقا و مشاهدات طولی با توجه به مسأله شرایط آغازین ملکیان، م ..، ریخته گران، ر..  
 ۸۲ .....
- توزیع وایبل معکوس وزنی زادکرمی، م.، معصومی، غ.  
 ۸۶ .....
- پیش بینی زمان خرابی بر اساس داده های فرسایشی به روش تقریبی نزاکتی، ا..، رزمخواه، م..  
 ۹۰ .....
- توزیع نیمه لجستیک گسسته اصغرزاده، ا..، زلیکانی، م..  
 ۹۵ .....
- مقایسه چند توزیع بیرنجام-ساندرز طوسیان، و.، عبدالله نژاد، ک.  
 ۱۰۰ .....



دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن  
۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۶



## اندازه اطلاع نمونه در مورد پارامتر و پیش بین

آقای رشتی، م<sup>۱</sup>

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه اصفهان

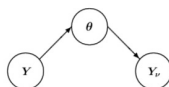
### چکیده

در آزمون طول عمر روی  $n$  قطعه، زمان‌های شکست  $r$  ( $0 < r \leq n$ ) قطعه اطلاعاتی در مورد (برآورد) پارامترهای مدل فراهم می‌کنند. همچنین در صورتی که  $r < n$  باشد، می‌توان با توجه به زمان‌های شکست، اطلاعاتی را نیز در مورد پیش‌بینی طول عمر  $n-r$  قطعه دیگر، به دست آورد. برای پیش‌بینی طول عمر قطعه جدید، نیاز به اطلاع در مورد مدل طول عمر (پارامترهای معلوم) و نمونه تصادفی تولید شده از آن است. بدین ترتیب یک جریان اطلاعاتی بین داده‌های نمونه، پارامترهای مدل و پارامتر پیش‌بین برقرار می‌شود. در این فصل جریان اطلاع و مقدار اطلاع فراهم شده از نمونه در مورد پارامتر، پیش‌بینی و یا توام آن‌ها بر اساس نمونه‌های وابسته شرطی و مستقل شرطی ارائه می‌شود.

**کلمات کلیدی:** آنتروپی، اندازه اطلاع نمونه، کولبک- لایبلر، مدل مستقل شرطی، مدل وابسته شرطی

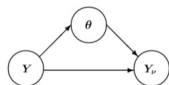
## ۱ پیش‌گفتار

زمانی که در چرخه‌ی طول عمر، بخواهیم پیشامد جدیدی را پیش‌بینی کنیم، کمبود داده‌ها، اصلی‌ترین مشکل به حساب می‌آید. در این حالت استفاده از روش‌های بیز کارا تر است. اطلاع فراهم شده از داده‌ها با رویکرد بیزی، اطلاع بیز نامیده می‌شود. عناصر تحلیل اطلاع بیز شامل مجموعه‌ای از  $n$  مشاهده که به صورت بردار  $1 \times n$  از دنباله متغیرهای تصادفی  $Y_1, Y_2, \dots$  با مدل احتمال توام  $f(y|\theta)$  است که در آن پارامتر  $\theta \in \Theta$  دارای توزیع احتمال پیشین  $f(\theta)$  است و از دیگر عناصر، پیش‌بینی پیشامد جدید،  $Y_v$  می‌باشد. پارامترها نقش محوری در پیش‌بینی ایفا می‌کنند. فرض کنید  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  مجموعه‌ای از مشاهدات که از مدل  $f(y|\theta)$  تولید شده‌اند و  $Y_v$  پیش‌بینی پیشامد جدید باشد. بین  $Y$ ،  $\theta$  و  $Y_v$  یک جریان اطلاع وجود دارد و بسته به این‌که به طور شرطی وابسته و مستقل باشند، این



شکل ۱: جریان اطلاع در حالت استقلال شرطی

جریان متفاوت است.  $\theta$  نقش محوری در جریان اطلاع از داده‌های  $Y$  به پیش‌بینی ایفا می‌کند. در شکل (۱) جریان اطلاع برای نمونه‌های مستقل شرطی نشان داده شده است. در این حالت پارامتر  $\theta$  تنها رابط



شکل ۲: جریان اطلاع در حالت وابسته شرطی

بین  $Y$  و  $Y_v$  می‌باشد، بنابراین جریان اطلاع از نمونه به توزیع پیش‌بین تنها از طریق پارامتر امکان‌پذیر خواهد بود. جریان اطلاع از  $Y$  به  $\theta$  و سپس به  $Y_v$  فرآیندی را تشکیل می‌دهند که سه‌گانه  $(Y, \theta, Y_v)$  را زنجیره مارکف می‌نامند. برای نشان دادن جریان اطلاع، مدل‌هایی چون مدل خطی نرمال و خانواده  $TTE$ ، را در نظر گرفته می‌شود. شکل (۲) جریان اطلاع را در حالتی که دنباله  $Y_i | \theta$ ،  $i = 1, 2, \dots$  وابسته شرطی هستند را نشان می‌دهد. در این حالت جریان اطلاع از  $Y$  به  $Y_v$  در دو حالت مستقیم و غیر مستقیم امکان‌پذیر است، در حالت اول ارتباط مستقیماً از داده‌ها به توزیع پیش‌بین برقرار است و در حالت غیر مستقیم داده‌ها از طریق پارامتر به توزیع پیش‌بین مرتبط می‌شود. تاثیر وابستگی بر جریان اطلاع را با استفاده از دو مدل، درون رده <sup>۱</sup>  $(IC)$  و همبستگی پیاپی <sup>۲</sup>  $(SC)$  بر نمونه‌های نرمال بررسی می‌شود.

## ۲ اندازه اطلاع نمونه

فرض کنید  $Q$  مقدار مجهول است که می‌تواند  $\theta$ ،  $Y_v$ ، توام آن‌ها و یا تابعی از آن‌ها باشد که دارای تابع چگالی احتمال  $f(q)$  می‌باشد. مقدار اطلاع نمونه مشاهده شده در مورد  $Q$  را می‌توان توسط معیار اختلاف آنتروپی  $\Delta H(y; Q) = H(Q) - H(Q|y)$  و یا می‌توان توسط تابع اطلاع تشخیص کولبک-لایبیلر  $K[f(q|y) : f(q)]$  اندازه‌گیری کرد.  $\Delta H(y; Q)$  یکی دیگر از معیارهای اندازه‌گیری در نظریه اطلاع، اندازه اطلاع نمونه مورد انتظار است که اطلاع متقابل نیز نامیده می‌شود. اطلاع متقابل تحت داده‌های نمونه که به صورت  $M(Y; Q) = E_y\{\Delta H(y; Q)\} = E_y\{K[f(q|y) : f(q)]\}$  تعریف می‌شود. متوسط اختلاف آنتروپی و متوسط اطلاع کولبک-لایبیلر، مقدار یکسانی را فراهم می‌کنند. اطلاع متقابل نمونه و پارامتر را اطلاع پارامتر نیز می‌گویند. فرض کنید  $Q = \theta$ ، بردار تولید شده از تابع درستنمایی

$L(\theta) \propto f(\mathbf{y}|\theta)$  و  $f(\theta|\mathbf{y}) \propto f(\theta)f(\mathbf{y}|\theta)$  تابع چگالی توزیع پسین باشد. فرض کنید  $Q = Y_v$ ، اطلاع متقابل  $M(\mathbf{Y}; Y_v)$  به عنوان اطلاع پیش‌بین نیز ارائه می‌شود. در بعضی حالت‌ها هر دو پارامتر  $\theta$  و  $Y_v$  را در نظر می‌گیریم.

<sup>۱</sup>maryam.870@gmail.com

<sup>۱</sup>Intraclass

<sup>۲</sup>Serial correlation



از آنجایی که در بیشتر حالت‌ها  $\Theta$  و  $Y_v$  وابسته می‌باشند، اطلاع آن‌ها را نمی‌توان به صورت جداگانه محاسبه کرد، بنابراین  $Q = (\Theta, Y_v)$  به صورت توام در نظر گرفته و  $\Delta H(\mathbf{y}; (\Theta, Y_v))$  و  $M(\mathbf{Y}; (\Theta, Y_v))$  را محاسبه می‌کنیم.

### ۳ اندازه اطلاع در نمونه‌های مستقل شرطی

قضیه زیر رابطه‌ی بین اندازه اطلاع توام با اندازه‌های اطلاع پارامتر و پیش‌بین را در نمونه‌های مستقل شرطی ارائه می‌کند.

**قضیه ۱.** اگر  $Y_1|\theta, Y_2|\theta, \dots$  به طور شرطی مستقل باشند، آنگاه

$$\Delta H(\mathbf{y}; \Theta) = \Delta H(\mathbf{y}; (\Theta, Y_v)) \quad (\text{الف})$$

$$M(\mathbf{Y}; \Theta) = M(\mathbf{Y}; (\Theta, Y_v)) \quad (\text{ب})$$

$$M(\mathbf{Y}; Y_v) \leq M(\mathbf{Y}; \Theta) \quad (\text{ج})$$

#### ۱.۳ طرح‌های بهینه

بسیاری از محققین علاقمند هستند اطلاع پارامتر را در طرح آزمایشات مطالعه کنند. اگر  $V. = I_p$  و تمام مقادیر ویژه برابر باشند،  $\lambda_j = \bar{\lambda} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \lambda_k$ ، طرح به دست آمده را طرح  $D$  بهینه بیزی می‌نامند. با توجه به تابع  $\eta = \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}$  تابعی نزولی از  $\eta$  است، برای حالتی که اطلاع پیشین ضعیف است، یعنی  $\sigma^2 \rightarrow \infty$ ، اطلاع پارامتر مورد انتظار ماکسیمم مقدار خود را می‌گیرد. در آمار روش‌های متعددی برای تعیین طرح بهینه وجود دارد، از طریق اندازه‌های اطلاع نیز می‌توان طرح مورد نظر را تعیین کرد. در این‌جا بر اساس اطلاع پارامتر و اطلاع پیش‌بین طرح بهینه را به دست می‌آوریم. طرحی را بهینه گوئیم که بیشترین اطلاع را در مورد پارامتر یا پیش‌بین و یا توامی از آن‌ها فراهم کند. بدین ترتیب با ماکسیمم کردن اطلاع متقابل، مقادیر مجهول طرح را برآورد می‌کنیم. طرح ساده‌ای را در نظر بگیرید که در آن  $x_{ij} \in \{0, 1\}$  که ساختار ANOVA یک راهه است. در این حالت  $tr(\Lambda) = \sum_{j=1}^p n_j = n$  و پارامترهای طرح  $\lambda_j = n_j$  می‌باشد.

**قضیه ۲.** تحت  $\eta$  و  $V.$ ،  $\sum_{j=1}^p n_j = n$  داریم

(الف) نمونه بهینه بر اساس اطلاع (توام) پارامتر  $M(\mathbf{Y}; \Theta)$  برابر است با

$$n_1^* = \frac{n}{p} + \frac{\eta}{p} \sum_{j=2}^p (v_{.j}^{-1} - v_{.1}^{-1}),$$

$$n_j^* = n_1^* - \eta(v_{.j}^{-1} - v_{.1}^{-1}), j = 2, \dots, p$$

(ب) نمونه بهینه اطلاع بر اساس اطلاع پیش‌بین  $M(\mathbf{Y}; Y_v)$  برای پیش‌بینی در  $z_v$  برابر است با

$$n_1^* = \frac{|z_{v1}|n}{\sum_{j=1}^p |z_{vj}|} + \frac{\eta}{\sum_{j=1}^p |z_{vj}|} \sum_{j=2}^p (v_{.j}^{-1} - v_{.1}^{-1}),$$

$$n_j^* = \frac{|z_{vj}|}{|z_{v1}|} n_1^* - \frac{\eta}{|z_{v1}|} (|z_{v1}|v_{.j}^{-1} - |z_{vj}|v_{.1}^{-1}), j = 2, \dots, p$$

و داریم  $M(\mathbf{Y}; \Theta | n_i^*, z_v) = M(\mathbf{Y}; (\Theta, Y_v) | n_i^*, z_v) \geq M(\mathbf{Y}; Y_v | n_i^*, z_v)$  سنگپوروالا<sup>۳</sup> (۱۹۹۳) و همکاران از طرح‌های بهینه اطلاع پیش‌بین برای سرعت بخشیدن به آزمون‌های طول عمر استفاده کردند.

## ۴ اندازه اطلاع در نمونه‌های وابسته شرطی

هنگامی که دنباله متغیرهای تصادفی  $(Y_i | \theta)$ ،  $i = 1, 2, \dots$  وابسته شرطی باشند، اطلاع فراهم شده از نمونه در مورد توام پارامتر و پیش‌بین را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد

$$M(\mathbf{Y}; (\Theta, Y_v)) = M(\mathbf{Y}; \Theta) + M(\mathbf{Y}; Y_v | \Theta) = M(\mathbf{Y}; Y_v) + M(\mathbf{Y}; \Theta | Y_v)$$

که در آن  $M(\mathbf{Y}; Y_v | \Theta) \geq 0$  اندازه وابستگی شرطی است، در صورتی که دنباله‌ها مستقل شرطی باشند، طبق قسمت الف) قضیه داریم  $M(\mathbf{Y}; (\Theta, Y_v)) = M(\mathbf{Y}; \Theta)$  و تجزیه بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت  $M(\mathbf{Y}; (\Theta, Y_v)) = M(\mathbf{Y}; \Theta) = M(\mathbf{Y}; Y_v) + M(\mathbf{Y}; \Theta | Y_v)$  در حالت وابستگی می‌توان نتیجه گرفت  $M(\mathbf{Y}; \Theta) \leq M(\mathbf{Y}; Y_v)$  اگر و تنها اگر  $M(\mathbf{Y}; \Theta | Y_v) \leq M(\mathbf{Y}; Y_v | \Theta)$

## ۱.۴ مدل‌های همبسته درون رده و پیایی

در این جا دو مدل مهم را در نظر گرفته شده که عبارتند از مدل درون رده ( $IC$ ) که به ازای تمام مقادیر  $j \neq i$ ،  $\rho_{ij|\theta} = \rho$  و مدل همبستگی پیایی ( $SC$ ) با  $\rho_{i, i+k|\theta} = \rho^k \geq 0$ ،  $k > 0$  می‌باشد.

قضیه ۳. الف) در هر سه مدل،  $M(\mathbf{Y}; \Theta | \rho)$ ،  $M(\mathbf{Y}; Y_v | \rho)$  و  $M(\mathbf{Y}; (Y_v, \Theta) | \rho)$  توابعی صعودی از  $n$  و توابعی نزولی از  $\eta$  می‌باشند.

ب) برای هر دو مدل  $IC$  و  $SC$ ،  $M(\mathbf{Y}; \Theta | \rho)$  تابعی نزولی از  $\rho$  و

$$M^{IC}(\mathbf{Y}; \Theta | \rho) \leq M(\mathbf{Y}; \Theta | \rho)^{SC} \leq M(\mathbf{Y}; \Theta)^{UC}$$

ج) برای هر دو مدل  $IC$  و  $SC$ ،  $M(\mathbf{Y}; Y_v | \rho)$  تابعی صعودی از  $\rho$  و

$$M^{IC}(\mathbf{Y}; Y_v | \rho) \geq M(\mathbf{Y}; Y_v | \rho)^{SC} \geq M(\mathbf{Y}; Y_v)^{UC}$$

از قضیه واضح است که نمونه‌هایی که دارای وابستگی شدید هستند، اطلاع کمی در مورد پارامتر و بیشترین اطلاع را در مورد پیش‌بین دارند.

## ۲.۴ آماره‌های ترتیبی

$n$  قطعه را در نظر بگیرید که در زمان  $t = 0$  شروع به کار می‌کنند. فرض کردیم تا زمان  $t_c$  وقتی داده‌های موجود مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است،  $r$  قطعه در فاصله زمانی  $(0, t_c)$  از کار افتاده‌اند، بنابراین داده‌ها شامل  $r$  آماره ترتیبی یعنی  $t_{(1)} < t_{(2)} < \dots < t_{(r)} < t_c$  است و بقیه  $n - r$  قطعه، بعد از زمان  $t_c$  از کار می‌افتند. با در نظر گرفتن داده‌های سانسور شده طبق سانسور نوع  $I$ ،  $t_c$  از قبل مشخص و  $r$  مقدار تصادفی است اما با استفاده از داده‌های

<sup>۳</sup>Singpurwalla

شکست سانسور شده نوع II،  $r$  از قبل مشخص و  $t_c = t_{(r)}$  مقدار تصادفی است. آماره‌های ترتیبی به یکدیگر وابسته می‌باشند و می‌توان با اطلاع متقابل وابستگی بین آماره‌های ترتیبی را اندازه‌گیری کرد. اطلاع متقابل بین دو آماره ترتیبی برابر

$$M(Y_r; Y_{r+1} | \theta) = M_n(r) = \log B(r+1, n-r+1) + \log(n+1) - 1 - r\{\psi(r) - \psi(n)\} - (n-1)\{\psi(n-r) - \psi(n)\}$$

که توسط ابراهیمی و همکاران (۲۰۰۴) به صورت زیر محاسبه شده است. دنباله آماره‌های ترتیبی  $Y_1, \dots, Y_n$  را در نظر بگیرید.

$$M_n(Y_i; Y_{i+1}) \equiv K_n(f_{i,i+1} : f_i f_{i+1})$$

$M_n(r)$  اندازه وابستگی بین آماره‌های ترتیبی از نمونه مستقل به شرط  $\theta$  را اندازه‌گیری می‌کند. همچنین ابراهیمی و همکاران (۲۰۰۴) ثابت کردند  $M_n(r)$  تابعی صعودی از  $n$  است.

**قضیه ۴.** فرض کنید  $M(\mathbf{Y}_r; (\Theta, Y_{r+1}))$  اطلاع فراهم شده با  $r$  آماره ترتیبی در مورد توام پارامتر و پیش‌بینی آماره ترتیبی بعدی باشد. آنگاه

$$M(\mathbf{Y}_r; (\Theta, Y_{r+1})) = M(\mathbf{Y}_r; \Theta) + M_n(r) \geq M(\mathbf{Y}_r; \Theta) \quad (\text{الف})$$

(ب) بندهای زیر معادلند

$$M(\mathbf{Y}_r; Y_{r+1}) \geq (\leq) M_n(r) \quad (\text{i})$$

$$\mathbf{Y}_{r+1} = (Y_1, \dots, Y_r, Y_{r+1}) \quad \text{که در آن } M(\Theta; Y_{r+1}) \geq (\leq) M(\mathbf{Y}_{r+1}; \Theta) - M(\mathbf{Y}_r; \Theta) \quad (\text{ii})$$

از قضیه واضح است که به شرط  $\theta$  آماره‌های تصادفی وابسته هستند و اطلاع فراهم شده از  $r$  آماره ترتیبی در مورد توام پارامتر و آماره ترتیبی بعدی بیشتر از اطلاع فراهم شده در مورد پارامتر است.

## مراجع

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1970). *Handbook of mathematical functions*, with Formulas and Mathematical Tables. Dover, New York.
- [2] Cover, T.M. and Thomas, J.A. (2006). *Elements of information theory*, 2<sup>nd</sup> edition. Wiley, New York.
- [3] Ebrahimi, N., Soofi, E.S. and Soyer, R. (2010). On the sample information about parameter and prediction. *Statistical Science*, **25**, 348-367.
- [4] Ebrahimi, N., Soofi, E.S. and Zahedi, H. (2004). Information properties of order statistics and spacings. *IEEE Transactions Information Theory*, **50**, 177-183.
- [5] Singpurwalla, N.D. and Polson, N.G. and Verdinielli, I. (1993). *Shannon information and Bayesian design for prediction in accelerated life-testing*. In *reliability and Decision Making*, (Barlow, R.E., Clarotti, C.A. and Spizzichino, F., eds.), 247-256. Chapman and Hall, London.



دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن

۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۶



## مفاهیم سالخوردگی و ارتباط آنها با شاخص های نابرابری

بهدانی. ز<sup>۱</sup> محتشمی بزراداران، غ<sup>۲</sup> صادقپور گیلده، ب<sup>۳</sup>

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

### چکیده

بخش وسیعی از نظریه قابلیت اعتماد به مطالعه ویژگی ها، مفاهیم و کاربردهای مفاهیم سالخوردگی اختصاص یافته است، در قابلیت اعتماد اشکال مختلفی از سالخوردگی مورد علاقه می باشد. مشخصه های سالخوردگی و ترتیب های جزئی برای توزیع های عمر رابطه نزدیکی دارند. بین شاخص های نابرابری به خصوص منحنی لورنتس با برخی روابط سالخوردگی و زمان میانگین مانده عمر و طول عمر، قضایا و ویژگی های جالبی وجود دارد که با بررسی آن ها نتایج مهمی حاصل خواهد شد. در این مقاله به بررسی ارتباط بین مفاهیم سالخوردگی و شاخص های نابرابری اقتصادی مانند منحنی لورنتس، منحنی بن فرونی و منحنی زنگا می پردازیم و سعی می کنیم تفسیر روشنی از این ارتباط را بیان کرده و در نهایت برای درک بهتر و آشنایی بیشتر با مفاهیم و روابط ارائه شده به دنبال یافتن نتایج عددی و بحث های کاربردی می باشیم.

**کلمات کلیدی:** منحنی لورنتس، منحنی بن فرونی، منحنی زنگا، مفاهیم سالخوردگی

## ۱ پیش گفتار

بحث قابلیت اعتماد از جمله مباحث آمار است که در صنعت، تکنولوژی، پزشکی و سایر علوم دارای نقش اساسی و انکارناپذیری است. تعاریف متفاوتی از قابلیت اعتماد در متون آماری وجود دارد. درحقیقت می توان آن را احتمال عملکرد رضایت بخش یک سیستم در زمان معین تعریف کرد. از نظر آماری، قابلیت اطمینان، سازگاری مجموعه

<sup>۱</sup>zbehdani@yahoo.com

<sup>۲</sup>grmohtashami@um.ac.ir

<sup>۳</sup>sadeghpour@um.ac.ir

ای از ابعاد یا ابزارهای اندازه گیری است که اغلب به منظور توضیح دادن یک آزمایش استفاده می شود. قابلیت اعتماد مفهومی عمومی است، که به عنوان یک ویژگی مثبت برای یک فرد یا یک محصول شناخته شده است. در این مقاله ابتدا به معرفی برخی از شاخص های نابرابری و ارتباط بین آنها می پردازیم و سپس مفاهیم سالخوردگی به همراه برخی از ویژگی های آنها را معرفی کرده و در نهایت ارتباط این مفاهیم و شاخص های نابرابری اقتصادی جدیدی که توسط محققین قبلاً ارائه نشده را جستجو خواهیم کرد. در نهایت برای درک بهتر از مفاهیم و مباحث ارائه شده با ارائه چند مثال کاربردی بحث را خاتمه خواهیم داد.

## ۲ مفاهیمی از نابرابری اقتصادی

برای سنجش میزان نابرابری اقتصادی یا به عبارت دیگر توزیع نا عادلانه درآمد، معمولاً «منحنی لورنتس» استفاده می شود. این منحنی در مطالعه توزیع های درآمد در اقتصاد جزو مهمترین ابزارها است. برای دستیابی به منحنی لورنتس، روی محور افقی درصد تجمعی درآمدها را که بین گروه های مختلف درآمد توزیع می شود و سهم آنها را تشکیل می دهد، و روی محور عمودی درصد های جمعیت که درآمدهای درآمد فوق را دریافت می دارند قرار می دهیم. اگر توزیع درآمدها به طور عادلانه صورت گیرد، خط مستقیمی (در واقع قطر اصلی مربع حاصل) به دست می آید. در صورتی که توزیع درآمدها نا عادلانه و نابرابر باشد منحنی محدب می شود. خط مستقیم مذکور و حاصل از حالت اول، به خط توزیع کاملاً عادلانه معروف است، و منحنی محدب حاصل، منحنی لورنتس نامیده می شود. منحنی لورنتس در حالت کلی به صورت (۱) تعریف می شود:

$$L(u) = \frac{1}{E(X)} \int_0^u F^{-1}(t) dt. \quad (1)$$

که در آن  $F$  تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نامنفی  $X$  و برای  $u \in [0, 1]$ ،  $F^{-1}(u) = \sup\{x : F(x) \leq u\}$ ،  $E(X) = \int_0^\infty f(y) dy$  می باشد با توجه به (۱) مشخص است که تابع لورنتس تابعی صعودی، محدب، پیوسته با  $L(0) = 0$  و  $L(1) = 1$  می باشد. بر عکس هر تابع با این ویژگی ها یک تابع لورنتس از یک توزیع آماری معین است.

شاخص های مختلفی بر اساس منحنی لورنتس تعریف می شوند، که از بین آنها ضریب جینی مهمترین اندازه ای است که برای سنجش میزان نابرابری درآمد در جامعه به کار برده می شود. ضریب جینی به صورت دو برابر ناحیه بین منحنی لورنتس و خط قطر تعریف می شود که همواره نامنفی و مقداری بین صفر و یک است. در مطالعه اندازه های نابرابری، منحنی لورنتس و ضریب جینی کاربرد بیشتری دارد ولی در سال ۱۹۳۰ بن فرونی اندازه جدیدی به نام ضریب بن فرونی را برای بررسی نابرابری اقتصادی معرفی کرد. ضریب بن فرونی  $B = 1 - \int_0^1 B_F(u) du$  بر اساس منحنی بن فرونی  $B_F = \frac{1}{\mu u} \int_0^u F^{-1}(t) dt$  تعریف می شود. این ضریب حساسیت بیشتری نسبت به سطوح پایین توزیع درآمد دارد در قابلیت اعتماد و آزمون طول عمر نیز کاربرد دارد. در حالت کلی منحنی بن فرونی اکیداً صعودی است و می تواند محدب و یا مقعر باشد. زنگا در سال ۱۹۸۴ میلادی شاخص جدیدی به عنوان جایگزین ضریب جینی معرفی کرد. این شاخص از مقایسه درآمد میانگین  $100u\%$  پایین جامعه و میانگین  $100(1-u)\%$  بالای جامعه بدست می آید. منحنی زنگا برای متغیر تصادفی نامنفی پیوسته به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z(u) = 1 - \frac{F^{-1}(u)}{F_1^{-1}(u)}. \quad (2)$$

که  $F_1(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x tf(t)dt$  به اولین گشتاور ناقص شهرت دارد. زنگا در سال ۲۰۰۷ منحنی زنگا را به صورت  $Z(u) = 1 - \frac{L(u)}{1-L(u)}$  تعریف کرد که بیانگر ارتباط بین منحنی لورنتس و منحنی زنگا نیز می‌باشد. شاخص زنگا برابر است با  $Z = \int_0^1 Z(u)du$  که  $u \in (0, 1)$  برتری این معیار نسبت به سایر معیارهای دیگر این است که این شاخص ارتباط فقر و ثروت را به خوبی منعکس می‌کند.

پس از اندازه‌گیری میزان نابرابری اقتصادی دو جامعه موضوع مقایسه آن‌ها مطرح می‌شود. مقایسه دو متغیر تصادفی از طریق ترتیب‌بندی‌های تصادفی انجام‌پذیر است. ترتیب‌های تصادفی که حاکی از روابط ترتیبی بین توزیع‌های احتمال هستند برای مقایسه متغیرهای تصادفی مفیدند. ترتیب‌های تصادفی به طور گسترده در چندین زمینه مختلف آمار به‌ویژه فرآیند تصادفی، قابلیت اعتماد، نظریه صف، اقتصاد، بیمه و ... کاربرد دارند.

برای متغیرهای تصادفی نامنفی  $X_1, X_2$  با میانگین متناهی و توابع توزیع تجمعی  $F_1, F_2$  و توابع لورنتس  $L_1, L_2$  ترتیب لورنتس را به  $X_1 \leq_L X_2$  نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_1 \leq_L X_2 \iff L_2(u) \leq L_1(u) (G_1 \leq G_2) \forall u \in [0, 1]$$

$X_2$  بزرگ‌تر از  $X_1$  در حالت لورنتس خوانده می‌شود و به این معنا است که تابع لورنتس  $L_1$  همواره بالاتر از تابع لورنتس  $L_2$  قرار دارد. در این بخش از مقاله ضمن معرفی برخی شاخص‌های نابرابری و مشخصه‌های آن ارتباطی که این شاخص‌ها با هم دارند نیز بیان خواهد شد.

### ۳ مفاهیم سالخوردگی

بخش وسیعی از نظریه قابلیت اعتماد به مطالعه ویژگی‌ها و کاربردهای مفاهیم سالخوردگی اختصاص یافته است، در قابلیت اعتماد اشکال مختلفی از سالخوردگی مورد علاقه می‌باشد. در مطالعات مفاهیم سالخوردگی بررسی می‌شود که یک مولفه یا سیستم با افزایش سن بهبود می‌یابد یا بدتر می‌شود. در مفاهیم قابلیت اعتماد، توزیع‌های طول عمر بر اساس رفتار توابعی چون نرخ شکست و میانگین باقی‌مانده عمر به رده‌های مختلف تقسیم می‌شوند و لذا این تقسیم‌بندی بر اساس مشخصه‌های سالخوردگی توزیع‌های طول عمر برای انتخاب مدل مناسب مفید می‌باشد. مفاهیم سالخوردگی متعددی مانند نرخ مخاطره صعودی (نزولی)  $IHR(DHR)$ ، متوسط نرخ مخاطره صعودی (نزولی)  $IHRA(DHRA)$ ، نو بهتر از استفاده شده در نرخ مخاطره  $NBUHR$ ، نو بهتر از استفاده شده در متوسط نرخ مخاطره  $NBUHRA$ ، میانگین باقی‌مانده طول عمر صعودی (نزولی)  $IMRL(DMRL)$ ، واریانس طول عمر صعودی (نزولی)  $IVRL(DVRL)$ ، نو بهتر (بدتر) از استفاده شده  $NBU(NWU)$ ، در این بخش از مقاله معرفی می‌شوند و ضمن ارائه برخی از مشخصه‌های آن‌ها ارتباط آن‌ها را با یکدیگر بیان می‌کنیم.

### ۴ ارتباط مفاهیم سالخوردگی و شاخص‌های نابرابری

هر یک از شاخص‌های نابرابری معرفی شده در بخش قبل دارای مفاهیمی در قابلیت اعتماد هستند که برخی از این مفاهیم توسط محققین ارائه شده است به عنوان مثال منحنی زنگا را می‌توان به عنوان تفاضل متوسط عمر مولفه‌هایی که قبل از رسیدن به سن مورد نظر نابود شده‌اند و متوسط سن آنهایی که به سن مورد نظر رسیده‌اند نسبت به آنهایی که به سن مورد نظر رسیده‌اند تفسیر کرد. [۳] ارائه این مفاهیم و روابط بین مشخصه‌های سالخوردگی و شاخص‌های نابرابری اقتصادی از مهمترین اهداف این مقاله می‌باشد.

## ۵ مثالهای کاربردی

در این بخش از مقاله با ارائه مثالهای کاربردی و دادههای درآمد به دنبال درک بهتر و تفسیر روشن تر از مباحث ارائه شده در بخشهای قبل می‌باشیم. دادههای مورد استفاده مقاله مربوط به دادههای درآمد می‌باشد. این دادهها مربوط به طرح «آمارگیری از هزینه و درآمد خانوارهای شهری و روستایی» می‌باشد، که توسط مرکز آمار ایران و با همکاری معاونت‌های آمار سازمان‌های مدیریت و برنامه‌ریزی استان‌های کشور اجرا و نتایج آن در قالب کتابچه‌هایی در سطح کل کشور منتشر می‌گردد. برای دادههای مذکور منحنی‌های لورنتس، بن فرونی و زنگا رسم می‌شوند و با توجه به روابطی که در قسمت‌های قبل مقاله ارائه شده است مشخصه‌های سالخوردگی مرتبط با داده‌ها را یافته و با نتایجی که از طریق مستقیم کسب می‌شود مقایسه می‌شوند.

## مراجع

- [1] Bonferroni, C. E. (1930). *Elementi di statistica general*. Libreria Seber, Fireze.
- [2] Lorenz, M. O. (1905). *Methods of measuring the concentration of wealth*. Publications of the American statistical association, 9(70), 209-219.
- [3] Sreelakshmi, N. (2014). A quantile based analysis of income data (Doctoral dissertation, Cochin University of Science and Technology).
- [4] Zenga, M. (1984). *Proposta per un indice di concentrazione basato sui rapporti fra quantili di popolazione e quantili di reddito*. Giornale degli economisti e Annali di Economia, 301-326.
- [5] Zenga, M. (2007). *Inequality curve and inequality index based on the ratios between Lower and Upper arithmetic means*, Statistica & Applicazioni, 5.



دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن

۳۰ و ۳۱ اردیبهشت ۱۳۹۶



## سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته

بیات، م<sup>۱</sup> ترابی، ح<sup>۲</sup>

دانشگاه یزد، دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار

### چکیده

امروزه با توسعه‌ی علوم پزشکی و افزایش ساخت مصنوعات در بنگاه‌های تولیدی، انجام آزمایشات طول عمر جزء جدانشدنی تحقیقات کیفی و کلینیکی است. در این راستا انتخاب یک روش انجام اینگونه آزمایشات که هم بتواند بر برآورد پارامتر طول عمر توزیع متغیر طول عمر اثر مثبت داشته باشد و همچنین از یک سری محدودیت‌های مالی و زمانی تخطی نکند از اهمیت بالایی برخوردار است. امروزه استفاده از روش سانسور کردن در انجام آزمایشات طول عمر فراگیر شده است در این مقاله نیز سعی شده است تا سانسوری معرفی گردد که بتواند در پایان آزمایش تعداد از پیش تعیین شده برای شکست‌های مشاهده شده را محقق سازد همچنین حداکثر طول عمر سپری شده از آیت‌های سانسور شده نیز از پیش تعیین شده باشد.

**کلمات کلیدی:** سانسور پیش‌رونده نوع II، سانسور پیش‌رونده نوع I، سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته، آزمایشات طول عمر، شبیه‌سازی

## ۱ پیش‌گفتار

فرض کنید آزمایشگری قصد انجام آزمایش طول عمر برای  $n$  آیتم یکسان با متغیرهای طول عمر  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  را داشته باشد که در آن  $Y_i$ ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع تجمعی مطلقاً پیوسته  $F(\cdot)$  و تابع چگالی احتمال  $f(\cdot)$  با پارامترهای مجهول  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in \Theta$  هستند. فرض کنید آزمایش بدین صورت انجام پذیرد که تمامی  $n$  آیتم بطور همزمان تحت آزمایش قرار گیرند سپس بلافاصله پس از اولین شکست، تعداد

<sup>۱</sup> bayat.stat@chmail.ir

<sup>۲</sup>



$r_1$  واحد از واحدهای تحت بررسی به طور تصادفی انتخاب و از آزمایش خارج می‌شوند، پس از دومین شکست،  $r_2$  واحد تحت بررسی از آزمایش کنار گذاشته می‌شوند و به همین ترتیب تا اینکه در زمان شکست  $m$ ام همه‌ی پیش‌رونده نوع II<sup>۲</sup> نامیده می‌شود و مقادیر مشاهده شده حاصل از این نوع سانسور را با  $x_1, x_2, \dots, x_m$  نمایش می‌دهند. شکل ۲ را ببینید. در این روش انجام آزمایش تعداد شکست‌های مشاهده شده  $m$  و طرح برداشت سانسور  $(r_1, \dots, r_m)$  همگی پیش از آزمایش بطور ثابت در نظر گرفته شده‌اند. برای دانستن جزئیات بیشتر می‌توان به [۲]، [۱]، [۳]، [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۵]، [۴]، [۶]، [۲] و [۷] مراجعه نمود.

شکل ۱: سانسور پیش‌رونده نوع II

اگر در آزمایشی از سانسور پیش‌رونده نوع II استفاده شود تعداد  $r_i$  تا  $(i = 1, \dots, n)$  از واحدهایی که در مرحله‌ی  $i$ ام سانسور شده‌اند  $x_i$  واحد زمانی از عمرشان طی شده است. در برخی از آزمایشات می‌توان (نیاز است) از آیت‌هایی استفاده نمود که حداکثر  $t_i$  واحد زمانی از عمر آنها سپری شده باشد. به دلیل اینکه در سانسور پیش‌رونده نوع II زمان انجام سانسورها از قبل معلوم نمی‌باشد لذا از آیت‌های سانسور شده‌ی این گونه آزمایشات ممکن است که به خوبی نتوان استفاده نمود. اگر در انجام آزمایشی، آزمایشگر قصد داشته باشد از سانسور پیش‌رونده نوع I استفاده نماید نیز ممکن است تعداد رخدادهای مشاهده شده بسیار کم بوده و آزمایش نتایج خوبی را ارائه ننماید. برای رفع این ایراد در قسمت بعد سانسوری جدید ارائه خواهد شد که هم بتواند سانسورهای با زمان گذشت از عمر از پیش تعیین شده و هم تعداد مشاهدات از پیش معلوم ارائه دهد.

## ۲ معرفی طرح سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته و تابع چگالی احتمال

فرض کنید  $n$  واحد یکسان تحت شرایط ذیل تحت آزمایش طول عمر قرار گرفته باشند. پیش از شروع آزمایش  $m = (t_1, \dots, t_m)$  که یک بردار  $m$  تایی از زمان است به همراه  $m = (r_1, \dots, r_m)$  با شرط  $\sum_{i=1}^m r_i = n - m$  تعیین گردیده و آزمایش بدین گونه انجام پذیرد که به هنگام مشاهده رخداد زمان آن را ثبت نموده و به هنگام رسیدن به زمان  $\min\{t_1, X_1\}$  تعداد  $r_1$  واحد از اقلام زنده در آزمایش از آن به تصادف انتخاب گردیده و حذف شوند سپس آزمایش با واحدهای باقیمانده ادامه پیدا می‌کند. به طور کلی در زمان  $\min\{t_i, X_i\}$  تعداد  $r_i$  واحد از اقلام در آزمایش می‌بایست حذف گردند. این آزمایش تا زمان وقوع  $m$  امین رخداد یعنی  $X_m$  ادامه پیدا خواهد کرد. این سانسور، سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته نامیده می‌شود و شکل ۱ نحوه عملکرد این سانسور را نمایش می‌دهد.

شکل ۲: سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته.

داده‌های به دست آمده از انجام آزمایش با استفاده از این نوع سانسور را می‌توان با  $(x_1, \gamma_1), (x_2, \gamma_2), \dots, (x_m, \gamma_m)$  نمایش داد که در آن:

$$\gamma_i = \begin{cases} 1 & x_i \leq t_i \\ 0 & x_i > t_i. \end{cases}$$

تابع درست‌نمایی این سانسور به صورت رابطه (۱) می‌باشد.

$$f_{m,m}(m,m|m) = C \prod_{i=1}^m \left\{ f(x_i) \bar{F}(x_i)^{\gamma_i r_i} \bar{F}(t_i)^{(1-\gamma_i)r_i} \right. \\ \times I_{(x_{i-1}, \infty)}(x_i) \{ I_{\{1\}}(\gamma_i) I_{(x_{i-1}, t_i]}(x_i) \\ \left. + I_{\{.\}}(\gamma_i) I_{(t_i, \infty)}(x_i) \} \right\} \quad (1)$$

که در آن C یک ثابت استاندارد کننده است و مقدار آن برابر است با:

$$C = \prod_{i=1}^m \left\{ n - \sum_{j=1}^{i-1} (r_j + 1) - (1 - \gamma_i) r_i \right\} \quad (2)$$

**قضیه ۱.** فرض کنید متغیرهای طول عمر دارای توزیعی از خانواده نمایی تک پارامتره با فرم  $1 - e^{-\eta(\theta)d(x)}$  باشند به طوری که  $\eta$  یک تابع معکوس‌پذیر باشد آنگاه برآورد درست‌نمایی پارامتر برابر است با:

$$\hat{\theta} = \eta^{-1} \left( \frac{m}{\sum_{i=1}^m \{ d(x_i) - \eta(\theta) d(x_i) \gamma_i r_i - \eta(\theta) d(t_i) (1 - \gamma_i) r_i \}} \right) \quad (3)$$

**قضیه ۲.** فرض کنید متغیرهای طول عمر دارای توزیعی از خانواده نمایی تک پارامتره با فرم  $1 - e^{-\eta(\theta)d(x)}$  باشند به طوری که  $\eta$  یک تابع معکوس‌پذیر باشد آنگاه اطلاع فیشر پارامتر جامعه برابر است با:

$$I(\theta) = m \frac{1}{\eta^2(\theta)} \left[ \frac{\partial \eta(\theta)}{\partial \theta} \right]^2 \quad (4)$$

**برهان.** با توجه به اینکه خانواده نمایی در شرایط نظم صدق می‌کند لذا:

$$I(\eta) = -E \left( \frac{\partial^2 \ln(f_{m,m}(m,m|m))}{\partial \eta^2} \right) \\ = -E \left( \frac{\partial^2 \ln \left( C \prod_{i=1}^m \left\{ \eta d'(x_i) e^{-\eta d(x_i)} e^{-\eta d(x_i) \gamma_i r_i} e^{-\eta d(t_i) (1 - \gamma_i) r_i} \right\} \right)}{\partial \eta^2} \right) \\ = -E \left( \sum_{i=1}^m \frac{-1}{\eta^2} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \eta}{\partial \eta^2} \{ d(x_i) + d(x_i) \gamma_i r_i + d(t_i) (1 - \gamma_i) r_i \} \right) \\ = m \frac{1}{\eta^2} \quad (5)$$

با توجه به اینکه  $I(\theta) = I(\eta) \left[ \frac{\partial \eta(\theta)}{\partial \theta} \right]^2$  داریم:

$$I(\theta) = m \frac{1}{\eta^2(\theta)} \left[ \frac{\partial \eta(\theta)}{\partial \theta} \right]^2 \quad (6)$$

□

### ۳ مقایسه و شبیه‌سازی

در این بخش برای ایجاد یک مقایسه بین سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته و سانسور پیش‌رونده نوع II از شبیه‌سازی استفاده شده است. این شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار R و روش مونت‌کارلو انجام پذیرفته است. فرض

شده است که داده‌ها از توزیع نمایی با میانگین ۵ و پارامتر ۰,۲ پیروی نمایند. این داده‌ها برای  $n$  و  $m$  طرح سانسور کردن‌های متفاوت 10000 بار تولید شده هر بار با استفاده از به ترتیب سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته و سانسور پیش‌رونده نوع II برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر بدست آورده شده است و در پایان آریبی تجربی و MSE برآوردها و مجموع عمر سپری شده‌ی آیت‌های تحت آزمایش برای هرکدام از روش‌های سانسور در جداول ۱ و ۲ آورده شده است. که در آن:

$TOTAL_1$  = مجموع عمر سپری شده‌ی آیت‌ها با استفاده از سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته،

$TOTAL_2$  = مجموع عمر سپری شده‌ی آیت‌ها با استفاده از سانسور پیش‌رونده نوع II،

$\hat{\theta}_1$  = برآورد تجربی پارامتر با استفاده از سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته،

$\hat{\theta}_2$  = برآورد تجربی پارامتر با استفاده از سانسور پیش‌رونده نوع II،

$MSE_1$  = میانگین مربعات خطای تجربی برآوردها با استفاده از سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته،

$MSE_2$  = میانگین مربعات خطای تجربی برآوردها با استفاده از سانسور پیش‌رونده نوع II.

جدول ۱: نتایج شبیه‌سازی سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته و سانسور پیش‌رونده نوع II با 10000 مرتبه تکرار.

$t$	$r$	$m$	$n$
۳/۳،۲/۵،۱/۵،۰/۸،۰/۳	۳،۰۰۰،۳	۵	۲۰
۲،۱/۶،۱،۰/۶،۰/۳	۵،۰۰۰،۵	۵	۳۰
۱/۵،۱،۰/۶،۰/۴،۰/۲	۹،۰۰۰،۹	۵	۵۰
۷/۵،۶/۹،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰/۶،۰/۳،۰/۲	۲،۳۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰/۱۰،۰/۱۰،۰/۱۰	۱۵	۵۰
۴،۳/۵،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰/۸،۰/۵،۰/۲،۰/۱	۵،۵۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰/۱۰،۰/۱۰،۰/۱۰،۰/۲۰	۱۰	۷۰
۴/۵،۴،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰/۷،۰/۴،۰/۳،۰/۱	۵،۵۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰/۱۰،۰/۱۰،۰/۱۰،۰/۱۰	۲۰	۷۰
۱۲،۱۰/۶،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰/۵،۰/۴،۰/۲،۰/۱	۴،۴۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰/۸،۰/۸،۰/۸،۰/۸	۳۰	۷۰
۶،۵/۳،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰/۵،۰/۳،۰/۲،۰/۱	۸،۸۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰/۱۶،۰/۱۶،۰/۱۶،۰/۱۶	۲۰	۱۰۰
۸/۵،۷/۶،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰/۴،۰/۳،۰/۲،۰/۱	۷،۷۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰/۱۴،۰/۱۴،۰/۱۴،۰/۱۴	۳۰	۱۰۰
۱۴،۱۲/۷،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰/۴،۰/۳،۰/۲،۰/۱	۵،۵۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰/۱۰،۰/۱۰،۰/۱۰،۰/۱۰	۵۰	۱۰۰

جدول ۲: ادامه جدول ۱

$MSE_2$	$MSE_1$	$TOTAL_2$	$TOTAL_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_1$	$m$	$n$
۰/۰۱۹۵	۰/۰۱۹۵	۲۴/۶۴۳	۲۴/۳۵۹	۰/۲۵۲۵	۰/۲۵۴۵	۵	۲۰
۰/۰۱۹۴	۰/۰۱۶۵	۲۵/۰۴۳	۲۴/۳۵۶	۰/۲۴۸۸	۰/۲۴۹۷	۵	۳۰
۰/۰۳۴۱	۰/۰۲۲۳	۲۵/۰۱۲	۲۴/۲۷۰	۰/۲۵۸۷	۰/۲۵۴۶	۵	۵۰
۰/۰۰۳۲	۰/۰۰۳۲	۷۶/۰۴۶۱	۷۴/۳۷۴	۰/۲۱۰۸	۰/۲۱۴۶	۱۵	۵۰
۰/۰۰۶۴	۰/۰۰۶۴	۴۸/۶۷۸	۴۸/۹۱۱	۰/۲۲۹۳	۰/۲۲۷۳	۱۰	۷۰
۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۱۸	۱۰۱/۶۰۸	۹۴/۱۸۰	۰/۲۰۷۳	۰/۲۱۹۵	۲۰	۷۰
۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۵	۱۴۹/۹۹۲	۱۴۹/۴۴۵	۰/۲۰۶۶	۰/۲۰۷۸	۳۰	۷۰
۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۲۲	۹۹/۸۶۶	۹۹/۸۰۳	۰/۲۱۰۴	۰/۲۱۰۴	۲۰	۱۰۰
۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۴	۱۴۹/۹۱۷	۱۴۹/۵۴۵	۰/۲۰۶۷	۰/۲۰۷۵	۳۰	۱۰۰
۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۸	۲۴۹/۷۲۳	۲۴۸/۶۴۰	۰/۲۰۴۲	۰/۲۰۴۹	۵۰	۱۰۰

## ۴ دست‌آوردهای پژوهش

همانگونه که در جدول ۱ و جدول ۲ دیده می‌شود به طور میانگین مجموع طول عمر سپری شده‌ی آیت‌های تحت آزمایش در سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته نسبت به سانسور پیش‌رونده نوع II کمتر می‌باشد یعنی هزینه انجام آزمایش را کاهش می‌دهد و با توجه به مقدار پارامتر برآورد شده و MSE برآورد دیده می‌شود که سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته برآوردهایی به خوبی برآورد با استفاده از سانسور پیش‌رونده نوع II را نتیجه

می‌دهد. لذا با توجه به اینکه این روش انجام آزمایش می‌تواند تعداد  $n-m$  واحد با حداکثر طول عمرهای از پیش تعیین شده به همراه تعداد مشاهده از پیش تعیین شده را در اختیار آزمایشگر قرار دهد همچنین با توجه به نتایجی که از شبیه‌سازی استنتاج شد می‌توان "سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I تعمیم یافته" را به آزمایشگران توصیه نمود.

## مراجع

- [1] Balakrishnan, N. (2007). Progressive Censoring Methodology: an Appraisal (with discussions), *Test*, 16, 211–296.
- [2] Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). *Progressive Censoring: Theory, Methods, and Applications*, Birkhäuser, Boston.
- [3] Balakrishnan, N. and Cramer, E. (2014). *The Art of Progressive Censoring*, Springer, New York.
- [4] Balakrishnan, N. and Burkschat, M. and Cramer, E. and Hofman, G. (2008). Fisher Information Based Progressive Censoring Plans, *Computational Statistics and Data Analysis*, 53, 366–380.
- [5] Bairamov, I. and Parsi, S. (2011). On Flexible Progressive Censoring, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 4537–4544.
- [6] Burkschat, M. and Cramer, E. and Kamps, U. (2006). On Optimal Schemes in Progressive Censoring, *Statistics and Probability Letters*, 76, 1032–1036.
- [7] Burkschat, M. (2008). On Optimality of Extremal Schemes in Progressive Type II Censoring, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138, 1647–1659.
- [8] Cohen, AC. (1963). Progressively Censored Samples in Life Testing, *Technometrics*, 5, 327–329.
- [9] Cramer, E. and Kamps, U. (2001). Estimation with Sequential Order Statistics from Exponential Distributions, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 53, 307–324.
- [10] Cramer, E. and Iliopoulos, G. (2009). Adaptive Progressive Type-II Censoring, *Test*, 19, 342–358.
- [11] Herd, RG. (1956). Estimation of Parameters of a Population from a Multi-Censored Sample. Phd thesis, Iowa State College, Ames, Iowa.
- [12] Ng, H.K.T. and Kundu, D. and Chan, P.S. (2009). Statistical of Analysis of Exponential Lifetimes under an Adaptive Type-II Progressive Censoring Scheme, *Naval Research Logistics*, 56, 687–698.



## آنترپوی گذشته تجمعی پویا

موسوی جباری، ف<sup>۱</sup> عباس نژاد مشهدی، م<sup>۲</sup>  
گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری

### چکیده

در این مقاله می‌خواهیم آنترپوی گذشته تجمعی پویا را مورد بررسی قرار دهیم. به این منظور این آنترپوی را بر اساس نادرستی گذشته تجمعی بیان می‌کنیم و حالت پویای آن را به دست می‌آوریم. با به کارگیری ترتیب‌های تصادفی روابط مفیدی را برای این آنترپوی به دست می‌آوریم.

**کلمات کلیدی:** آنترپوی گذشته تجمعی پویا، نادرستی گذشته تجمعی پویا، ترتیب‌های تصادفی، نرخ خطر معکوس، میانگین زمان غیر فعال

## ۱ پیش‌گفتار

دی کرسنزو و لانگوباردی (۲۰۰۹)، اندازه‌اطلاعی را بر پایه تابع توزیع تجمعی  $F(x)$  معرفی نموده و آن را آنترپوی گذشته تجمعی ( $CPE$ ) نامیدند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\varepsilon}(x) = - \int_0^{\infty} F(x) \ln F(x) dx.$$

فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی با تکیه‌گاه  $(0, \infty)$  باشند و به ترتیب دارای تابع توزیع‌های  $F(x)$  و  $G(x)$  و توابع بقای  $\bar{F}(x)$  و  $\bar{G}(x)$  باشند. آن‌گاه نادرستی گذشته تجمعی  $CPI$  به صورت زیر بیان می‌شود:

<sup>۱</sup>farnosh\_musavi@yahoo.com

<sup>۲</sup>m.abbasnejad@hsu.ac.ir

$$\mathcal{L}\bar{H}_{X,Y} = - \int_0^{\infty} F(x) \ln G(x) dx.$$

اندازه های عدم حتمیت مرتبط با توزیع طول عمر، نقش مهمی را در قابلیت اعتماد بازی می کنند. دی کرسنزو و لانگوباردی (۲۰۰۹)، آنتروپی گذشته تجمعی پویا (DCPI) را بر پایه CPI برای توزیع طول عمر گذشته متناظر با متغیر تصادفی  $[X|X \leq t]$  به صورت زیر پیشنهاد کردند:

$$\bar{\varepsilon}(X, t) = - \int_0^t \frac{F(x)}{F(t)} \ln \frac{F(x)}{F(t)} dx, \quad t > 0,$$

و خواص یکنوایی این اندازه و کران های آن را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. برخی نتایج دیگر برای DCPI را می توانید در ناوارو و همکاران (۲۰۱۰) بیابید. نادرستی گذشته تجمعی پویا را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathcal{L}\bar{H}_{x,y}(t) = - \int_0^t \frac{F(x)}{F(t)} \ln \frac{G(x)}{G(t)} dx = - \int_0^t F_t(x) \ln G_t(x) dx, \quad t > 0,$$

که در آن  $F_t(x) = \frac{F(x)}{F(t)}$  و  $G_t(x) = \frac{G(x)}{G(t)}$  در این مقاله برخی ویژگی ها و کران ها را برای CPI مورد بررسی قرار می دهیم. برای مطالعه بیشتر در زمینه نتایج به دست آمده برای CPI و CPI تجربی در رابطه با ترتیب های تصادفی، دی کرسنزو و لانگوباردی (۲۰۱۳) را مشاهده کنید.

**قضیه ۱.** فرض کنید متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  مقادیر  $[0, b]$  را که  $b$  متناهی است، بپذیرند. آن گاه

$$(i) \mathcal{L}\bar{H}_{X,Y} \geq \bar{\varepsilon}(x) + (b - E(x)) \ln \left( \frac{b - E(x)}{b - E(y)} \right),$$

$$(ii) \mathcal{L}\bar{H}_{X,Y} \geq \bar{\varepsilon}(x) + (E(x) - E(y)),$$

$$(iii) X \leq_{st} Y \implies \mathcal{L}\bar{H}_{X,Y} \geq \max\{\bar{\varepsilon}(x), \bar{\varepsilon}(y)\},$$

$$(iv) X \geq_{st} Y \implies \mathcal{L}\bar{H}_{X,Y} \leq \min\{\bar{\varepsilon}(x), \bar{\varepsilon}(y)\}.$$

**قضیه ۲.** فرض کنید  $X$  و  $Y$  و  $Z$  متغیرهای تصادفی با تکیه گاه متناهی  $[0, b]$  باشند، در این صورت

$$(i) Y \geq_{st} Z \implies \mathcal{L}\bar{H}_{X,Y} \geq \mathcal{L}\bar{H}_{X,Z},$$

$$(ii) X \geq_{st} Y \implies \mathcal{L}\bar{H}_{X,Z} \geq \mathcal{L}\bar{H}_{Y,Z},$$

$$(iii) X \geq_{st} Z \geq_{st} Y \implies \mathcal{L}\bar{H}_{Y,X} \geq \max\{\mathcal{L}\bar{H}_{Y,Z}, \mathcal{L}\bar{H}_{Z,X}\}.$$

**قضیه ۳.** فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی با تکیه گاه متناهی  $[0, b]$  باشند، و فرض کنید  $Z$  ترکیبی از  $X$  و  $Y$  باشد. اگر (i)  $X \leq_{st} Y$  و  $Z \leq_{st} Y$  یا (ii)  $Y \leq_{st} X$  و  $Y \leq_{st} Z$  آن گاه

$$\mathcal{L}\bar{H}_{Y,X} + \mathcal{L}\bar{H}_{Y,Z} \geq \mathcal{L}\bar{H}_{X,Z}.$$

توجه کنید که می توان  $DCPI$  را به صورت زیر نیز بیان نمود

$$\mathcal{L}\bar{H}_{X,Y} = \ln G(t)m_F(t) - \frac{1}{F(t)} \int_0^t F(x)\ln G(x)dx,$$

که در آن  $m_F(t) = E[t - x | x \leq t]$ ، میانگین زمان غیر فعال برای  $x$  است. مثال زیر نشان می دهد که  $DCPI$  برای همه توزیع ها یکنوا نیست.

**مثال ۱.** فرض کنید  $X$  و  $Y$  به ترتیب دارای تابع توزیع های زیر باشند:

$$F(x) = \begin{cases} \exp\{-\frac{1}{4} - \frac{1}{x}\} & 0 < x \leq 1 \\ \exp\{-2 + \frac{x}{4}\} & 1 < x \leq 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{4} & 0 < x \leq 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

و

آن گاه به ازای  $t \geq 2$  داریم

$$\mathcal{L}\bar{H}_{X,Y}(t) = -2[\int_1^2 \exp\{\frac{1}{4} - \frac{1}{x}\} \ln(\frac{x}{t})dx + \int_2^t \exp\{\frac{x-2}{4}\} \ln(\frac{x}{t})dx]$$

که با رسم نمودار مشاهده میکنیم که  $\mathcal{L}\bar{H}_{X,Y}(t)$  یکنوا نیست. حال می خواهیم اثر تبدیلات خطی روی  $DCPI$  را مورد بررسی قرار دهیم.

**قضیه ۴.** برای دو متغیر تصادفی  $X$  و  $Y$ ، به ازای  $a > 0$  و  $0 < b < t$  داریم:

$$\mathcal{L}\bar{H}_{aX+b, aY+b}(t) = a\mathcal{L}\bar{H}_{X,Y}(\frac{t-b}{a}).$$

**قضیه ۵.** برای دو متغیر تصادفی نامنفی  $X$  و  $Y$ ،  $t \geq 0$  داریم

$$(i) \mathcal{L}\bar{H}_{X,Y}(t) \geq \bar{\varepsilon}(X, t) + m_F(t) \ln(\frac{m_F(t)}{m_G(t)}),$$

$$(ii) \mathcal{L}\bar{H}_{X,Y}(t) \geq \bar{\varepsilon}(X, t) + (m_F(t) - m_G(t)),$$

$$(iii) X \leq_{rh} Y \implies \mathcal{L}\bar{H}_{x,y}(t) \leq \min\{\bar{\varepsilon}(X, t), \bar{\varepsilon}(Y, t)\},$$

$$(iv) X \leq_{rh} Y \implies \mathcal{L}\bar{H}_{x,y}(t) \geq \max\{\bar{\varepsilon}(X, t), \bar{\varepsilon}(Y, t)\}.$$

**قضیه ۶.** فرض کنید  $X$  و  $Y$  و  $Z$  متغیرهای تصادفی نامنفی باشند. آن گاه به ازای  $t \geq 0$  داریم

$$(i) Y \geq_{rh} Z \implies \mathcal{L}\bar{H}_{X,Y}(t) \geq \mathcal{L}\bar{H}_{X,Z}(t),$$

$$(ii) X \geq_{rh} Y \implies \mathcal{L}\bar{H}_{X,Z}(t) \leq \mathcal{L}\bar{H}_{Y,Z}(t),$$

$$(iii) X \geq_{rh} Z \geq_{rh} Y \implies \mathcal{L}\bar{H}_{Y,X}(t) \geq \max\{\mathcal{L}\bar{H}_{Y,Z}(t), \mathcal{L}\bar{H}_{Z,X}(t)\}.$$

**قضیه ۷.** فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی باشند که در مدل مخاطره معکوس متناسب صدق می کنند. آن گاه

$$\mathcal{L}\bar{H}_{X,Y}(t) = \theta.\bar{\varepsilon}(X,t), t \geq 0.$$

برای مطالعه بیشتر در مورد نرخ مخاطره متناسب می توانید به دی کرسنزو (۲۰۰۰)، گوپتا و گوپتا (۲۰۰۷) و سانکاران و کلژا (۲۰۰۸) مراجعه کنید.

**قضیه ۸.** فرض کنید  $X$  و  $Y$  و  $Z$  متغیرهای تصادفی نامنفی باشند. اگر  $X \leq_{rh} Y$  (i) و  $Z \leq_{rh} Y$  یا  $Y \leq_{rh} X$  (ii) و  $Y \leq_{rh} Z$  آن گاه

$$\mathcal{L}\bar{H}_{X,Y}(t) + \mathcal{L}\bar{H}_{Y,Z}(t) \geq \mathcal{L}\bar{H}_{X,Z}(t), t > 0.$$

## مراجع

- [1] Di Crescenzo, A., Longobardi, M. (2009), *On cumulative entropies*, J Stat Plan Inference . 139, 4072–4087.
- [2] Di Crescenzo, A., Longobardi, M. (2013), *Stochastic comparisons of cumulative entropies*, Stochastic orders in reliability and risk, Lecture Notes in Statistics, vol 208. Springer, New York. 167–182.
- [3] Di Crescenzo, A. (2000), *Some results on the proportional reversed hazards model*, Stat Prob Lett. 50(4),313–321.
- [4] Gupta, RC., Gupta, RD. (2007), *Proportional reversed hazard rate model and its applications*, J Stat Plan Inference. 137,3525–3536.
- [5] Di Crescenzo, A., Longobardi, M. (2009), *On cumulative entropies*, J Stat Plan Inference . 139, 4072–4087.
- [6] Sankaran PG., Gleeja, VL. (2008), *Proportional reversed hazard and frailty models*, Metrika. 68(3), 333–342.





دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن  
۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۹



## دو آزمون نیکویی برازش پایای شکل-مقیاس برای داده‌های سانسور شده‌ی چپ

خدادوستان، س ۱ ترابی، ح ۲ میرحسینی، س. م ۳

گروه آمار، دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد

### چکیده

در یک آزمون طول عمر، گاهی به دلیل وجود عوامل بازدارنده، تمامی مشاهدات ثبت نمی‌شوند و یک نمونه سانسور شده چپ به دست می‌آید. در این مقاله داده‌های سانسور شده‌ی چپ به داده‌های سانسور شده‌ی نوع دوم تبدیل می‌شوند. با این تبدیل، دو آزمون نیکویی برازش که برای داده‌های سانسور شده‌ی نوع دوم پیشنهاد شده است، برای سانسور چپ نیز به کار گرفته می‌شود. همچنین مقادیر بحرانی و توان آزمون‌ها برای حجم نمونه‌های مختلف محاسبه و مقایسه می‌شوند.

**کلمات کلیدی:** آزمون نیکویی برازش، سانسور چپ، آزمون نسبت درست‌نمایی تلفیق شده، پایای شکل-مقیاس

### ۱ مقدمه

فرض کنید زمان شکست  $T$  یک متغیر تصادفی پیوسته‌ی مطلق با تابع توزیع تجمعی  $F_T$  باشد؛ آزمون فرضیه‌ای با فرضیه صفر

$$H_0 : F_T(t) = F\left(\left(\frac{t}{\theta}\right)^\nu\right), \quad \forall t \in, \quad (1)$$

<sup>۱</sup>sattar.kh.69@gmail.com

<sup>۲</sup>htorabi@yazd.ac.ir

<sup>۳</sup>

مد نظر است که تابع  $F$  یک تابع توزیع تجمعی کاملاً مشخص و  $\theta > 0$  و  $\nu > 0$  پارامترهای نامعلوم مقیاس و شکل هستند. ابتدا ژانگ [۴] دو آزمون نیکویی برازش بر اساس نسبت درستی برای داده‌های کامل ارائه کرد. سپس بگ‌دونوویسیس [۲] و همکاران این آزمون‌ها را تعمیم دادند و آن‌ها را تحت داده‌های سانسور شده‌ی نوع دوم برای آزمون فرضیه‌ی (۱) پیشنهاد کردند. حال سوالی که مطرح می‌شود این است که آیا این آزمون‌ها قابلیت استفاده برای داده‌های سانسور چپ را دارند؟ پاسخ مثبت است. در این مقاله، داده‌های سانسور شده‌ی چپ را به داده‌های سانسور شده‌ی نوع دوم تبدیل می‌کنیم. روشن است که در چنین حالتی، آزمون‌هایی که برای داده‌های سانسور شده‌ی نوع دوم پیشنهاد شدند، تحت سانسور چپ نیز قابل استفاده هستند. دو نمونه از چنین آزمون‌هایی معرفی می‌شوند؛ سپس مقادیر بحرانی و توان این آزمون‌ها زمانی که توزیع وایبول در برابر توزیع لگ‌نرمال آزمون می‌شود محاسبه و مقایسه می‌شوند.

## ۲ سانسور چپ

فرض کنید  $n$  واحد آزمایشی در یک آزمون طول عمر قرار دارند. از این واحدها، تعداد  $r$  واحد در ابتدای آزمایش از کار افتاده است و از طول عمر این واحدها آگاهی نداریم. در این حالت به متغیرهای تصادفی  $T_{n:n}, \dots, T_{r+1:n}$  یک نمونه‌ی سانسور شده‌ی چپ گویند که  $T_{i:n}$  زمان رخداد  $i$  امین شکست است. همچنین ممکن است در یک آزمون طول عمر، آزمایش تا زمانی ادامه یابد که  $r$  امین شکست رخ دهد. در این حالت متغیرهای  $T_{r:n}, \dots, T_{1:n}$  یک نمونه‌ی سانسور شده‌ی نوع دوم هستند. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به مرجع [۳] مراجعه شود. فرض کنید متغیرهای تصادفی  $T_n, \dots, T_1$  یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع  $F_T$  باشد که تحت فرضیه‌ی  $H_0$ ،  $T_i \sim F((\frac{t}{\theta})^\nu)$ ،  $i = 1, \dots, n$ ، فرض کنید متغیرهای تصادفی  $\tilde{V}_i$  به صورت زیر باشند:

$$\tilde{V}_i = F((\frac{T_i}{\theta})^\nu), \quad i = 1, \dots, n.$$

با توجه به پیوسته بودن توزیع  $F_T$  داریم:

$$\tilde{V}_i \stackrel{d}{=} F((\frac{T_i}{\theta})^\nu) \sim U(0, 1), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

همچنین می‌دانیم که

$$\tilde{V}_{i:n} \stackrel{d}{=} F((\frac{T_{i:n}}{\theta})^\nu) \sim \text{Beta}(i, n - i + 1), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

اکنون بنا بر استقلال و هم‌توزیع بودن  $T_i$ ‌ها و نیز روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$(\tilde{V}_{1:n}, \dots, \tilde{V}_{r+1:n}, \dots, \tilde{V}_{n:n}) \stackrel{d}{=} (1 - \tilde{V}_{n:n}, \dots, 1 - \tilde{V}_{r+1:n}, \dots, 1 - \tilde{V}_{1:n}). \quad (4)$$

با انتخاب  $n - r$  عنصر اول سمت راست رابطه (۳) داریم:

$$1 - \tilde{V}_{n:n} < \dots < 1 - \tilde{V}_{r+1:n},$$

$$1 - F((\frac{T_{n:n}}{\theta})^\nu) < \dots < 1 - F((\frac{T_{r+1:n}}{\theta})^\nu). \quad (5)$$

رابطه‌ی (۴)،  $n - r$  عنصر مرتب شده‌ی اول یک نمونه را نشان می‌دهد. در واقع می‌توان گفت که یک نمونه‌ی سانسور شده‌ی نوع دوم در اختیار داریم. مطالب این قسمت برگرفته از مرجع [۱] هستند.

### ۳ پایایی آماره‌های آزمون

در این بخش به بیان و اثبات قضیه‌ای بسیار مهم پرداخته می‌شود. پایایی آماره‌های آزمون نسبت به پارامترهای مکان و مقیاس با توجه به این قضیه قابل توجیه است. در طرح سانسور چپ، فرض کنید  $\hat{\theta}$  و  $\hat{\nu}$  برآوردگرهای ماکسیم درست‌نمایی  $\theta$  و  $\nu$  باشند که تابع درست‌نمایی زیر را ماکسیم می‌کنند:

$$\begin{aligned} \ell(\theta, \nu) = & \log C + (n-r) \log \nu - \nu(n-r) \log \theta + (\nu-1) \sum_{i=r+1}^n \log(t_{i:n}) \\ & + \sum_{i=r+1}^n \log f\left(\left(\frac{t_{i:n}}{\theta}\right)^\nu\right) + r \log[F\left(\left(\frac{t_{i:n}}{\theta}\right)^\nu\right)]. \end{aligned} \quad (6)$$

برآوردگرهای  $\hat{\theta}$  و  $\hat{\nu}$  را در متغیر تصادفی  $\tilde{V}_{i:n}$  قرار می‌دهیم تا متغیر تصادفی

$$V_{i:n} = F\left(\left(\frac{T_{i:n}}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\nu}}\right),$$

حاصل شود.

**قضیه ۱.** توزیع بردار تصادفی  $(V_{r+1:n}, \dots, V_{n:n})^T$  تحت فرضیه‌ی صفر به هیچ پارامتر نامعلومی بستگی ندارد.

**برهان.** در روند اثبات قضیه به دست آوردن برآوردگرهای  $\hat{\theta}$  و  $\hat{\nu}$  نیاز نیست. با قرار دادن  $y_{i:n} = \left(\frac{t_{i:n}}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\nu}}$  و مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۵)، معادلات درست‌نمایی به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} -(n-r) - \sum_{i=r+1}^n y_{i:n} \frac{f'(y_{i:n})}{f(y_{i:n})} - r y_{r+1:n} \frac{f'(y_{r+1:n})}{F(y_{r+1:n})} &= 0, \\ (n-r) + \sum_{i=r+1}^n \log(y_{i:n}) + \sum_{i=r+1}^n y_{i:n} \log(y_{i:n}) \left(\frac{f'(y_{i:n})}{f(y_{i:n})}\right) \\ &+ (r y_{r+1:n} \log(y_{r+1:n})) \frac{f'(y_{r+1:n})}{F(y_{r+1:n})} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

که

$$\tilde{y}_{i:n} = \left(\frac{t_{i:n}}{\hat{\theta}}\right)^\nu, \quad i = r+1, \dots, n.$$

به معادلات (۷) به چشم تابعی از متغیر تصادفی  $\tilde{Y}_{i:n} = \left(\frac{T_{i:n}}{\hat{\theta}}\right)^\nu$  نگاه می‌کنیم. می‌دانیم که برآوردگرهای  $\hat{\theta}$  و  $\hat{\nu}$  در دستگاه معادلات (۷) صدق می‌کنند. تحت فرضیه‌ی  $H$  متغیر تصادفی  $\tilde{Y}_i = \left(\frac{T_i}{\hat{\theta}}\right)^\nu$  دارای توزیع  $F$  است. توزیع نمونه‌ی تصادفی  $\tilde{Y}_n, \dots, \tilde{Y}_{r+1}$  که دارای تابع توزیع  $F$  هستند و آماره‌های ترتیبی این نمونه به صورت  $\tilde{Y}_{n:n}, \dots, \tilde{Y}_{r+1:n}$  به هیچ پارامتر نامعلومی بستگی ندارند. از برابری  $Y_{i:n} = \left(\frac{\theta}{\hat{\theta}}\right)^\nu \tilde{Y}_{i:n}^{\frac{\hat{\nu}}{\nu}}$  می‌توان نتیجه گرفت که متغیرهای تصادفی  $\frac{\hat{\nu}}{\nu}$  و  $\left(\frac{\theta}{\hat{\theta}}\right)^\nu$  در دستگاه معادلات صدق می‌کنند و تابعی از متغیرهای تصادفی  $\tilde{Y}_{n:n}, \dots, \tilde{Y}_{r+1:n}$  هستند. بنابراین توزیع بردار تصادفی  $(Y_{r+1:n}, \dots, Y_{n:n})^T$  به پارامتر نامعلومی وابسته نیست. با در نظر گرفتن برابری  $V_{i:n} = F(Y_{i:n})$  اثبات قضیه تمام می‌شود.  $\square$

اگر برآوردگرهای  $\hat{\theta}$  و  $\hat{\nu}$  را در رابطه‌ی (۴) قرار دهیم و داده‌های حاصل را در اولین آماره‌ی آزمون که توسط بگ‌دونوویسیس و همکاران پیشنهاد شد جایگذاری کنیم، اولین آماره‌ی آزمون نسبت درستنمایی تلفیق‌شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 ILR_{n-r:n}^{(1)} &= 2n \sum_{i=1}^{n-r-1} \left( \frac{1}{n-i+0.5} \log \frac{i-0.5}{n(1-V_{n-i+1:n})} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{i-0.5} \log \frac{n-i+0.5}{n(V_{n-i+1:n})} \right) \\
 &\quad + \frac{2n}{(n-r-0.5)(r+0.5)} \log \frac{I_{n-r-0.5}(n-r, r+1)}{I_{1-V_{r+1:n}}(n-r, r+1)}.
 \end{aligned}$$

**نتیجه ۱.** آماره‌ی آزمون  $ILR_{n-r:n}^{(1)}$  تابعی از بردار تصادفی  $(V_{r+1:n}, \dots, V_{n:n})^T$  است، بنابراین توزیع آن به هیچ پارامتر نامعلومی بستگی ندارد.

مقادیر بزرگ آماره، یعنی  $ILR_{n-r:n}^{(1)} > ILR_{n-r:n}^{(1)}(\alpha)$ ، باعث رد فرضیه‌ی  $H_0$  می‌شود که در آن،  $ILR_{n-r:n}^{(1)}(\alpha)$  چندک مرتبه‌ی  $\alpha$  آماره است. همچنین با قرار دادن برآوردگرهای  $\hat{\theta}$  و  $\hat{\nu}$  در رابطه‌ی (۴) و جایگذاری داده‌های حاصل در دومین آماره‌ی آزمون بگ‌دونوویسیس و همکاران، دومین آزمون نسبت درستنمایی تلفیق‌شده به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 ILR_{n-r:n}^{(2)} &= n \log^2(V_{r+1:n}) + 2n \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1 - V_{r+1:n}^l}{l^2} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n-r-1} \log^2 \frac{1 - V_{n-i+1:n}}{V_{n-i+1:n}} - (n-r-1) \log^2 \frac{1 - V_{r+1:n}}{V_{r+1:n}} \\
 &\quad - 2 \sum_{i=1}^{n-r-1} \left[ i \log \frac{i}{n-i} - (i-1) \log \frac{i-1}{n-i+1} + n \log \frac{n-i}{n-i+1} \right] \\
 &\quad \times \log \frac{1 - V_{n-i+1:n}}{V_{n-i+1:n}} \\
 &\quad + 2 \left[ (n-r-1) \log \frac{n-r-1}{r+1} + n \log \frac{r+1}{n} \right] \log \frac{1 - V_{r+1:n}}{V_{r+1:n}}.
 \end{aligned}$$

**نتیجه ۲.** آماره‌ی  $ILR_{n-r:n}^{(2)}$  تابعی از بردار تصادفی  $(V_{r+1:n}, \dots, V_{n:n})^T$  است، بنابراین تابع توزیع و مقادیر بحرانی آن به هیچ پارامتر نامعلومی بستگی ندارد.

مقادیر بزرگ آماره، یعنی  $ILR_{n-r:n}^{(2)} > ILR_{n-r:n}^{(2)}(\alpha)$ ، باعث رد فرضیه‌ی  $H_0$  می‌شود که در آن،  $ILR_{n-r:n}^{(2)}(\alpha)$  چندک مرتبه‌ی  $\alpha$  آماره است.

## ۴ مقادیر بحرانی و توان

در این بخش مقادیر بحرانی شبیه‌سازی شده و توان هر آزمون در سه جدول ارائه شده است. این مقادیر به ازای مقادیر مختلف  $n$  و در سطوح ۵٪ و ۱۰٪ به دست آمده است. مقادیر بحرانی و توان آزمون بر پایه‌ی شبیه‌سازی به تعداد ۲۰۰۰۰ بار به دست آمده است. کمیت  $p$  نسبت سانسور را نشان می‌دهد. توان هر دو آزمون زمانی که توزیع وایبول در مقابل لگ‌نرمال آزمون می‌شود در جدول ۳ آورده شده است. همان گونه که مشاهده می‌شود در هر دو

آزمون با افزایش حجم نمونه توان افزایش می‌یابد. توان آزمون‌ها در هر دو حالت سانسور بسیار شبیه به هم است و تنها تفاوت، در حجم نمونه  $n = 50$  مشاهده می‌شود. همچنین توان آزمون‌ها در حالتی که تعداد بیشتری از داده‌ها مشاهده نمی‌شوند اندکی کاهش می‌یابد و این امر منطقی به نظر می‌رسد. نکته‌ی قابل توجه این است که در هر دو حجم از سانسور، توان آزمون‌ها تفاوت بسیار کمی دارند.

جدول ۱: مقادیر بحرانی شبیه‌سازی شده آزمون یک طرفه  $ILLR_{n-r;n}^{(1)}$  در سطوح ۵٪ و ۱۰٪؛ به ازای مقادیر مختلف  $n$  تحت توزیع وایبول.

$p$	$\alpha$	$n$						
		۴۰	۵۰	۶۰	۸۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
۰/۹	۰/۱	۴/۷۶۰	۵/۱۴۴	۵/۶۱۷	۶/۰۴۵	۶/۷۳۱	۷/۵۲۵	۸/۴۰۳
	۰/۰۵	۵/۸۵۶	۶/۳۷۱	۶/۸۷۲	۷/۶۰۴	۷/۹۷۵	۹/۱۴۸	۹/۹۲۲
۰/۷۵	۰/۱	۶/۷۷۲	۷/۵۹۱	۸/۶۴۶	۱۰/۳۵۴	۱۲/۰۶۵	۱۵/۳۹۴	۱۹/۶۸۸
	۰/۰۵	۷/۷۵۸	۸/۵۵۹	۹/۸۷۱	۱۱/۷۳۵	۱۳/۴۳۷	۱۶/۵۵۴	۲۱/۳۷۴

جدول ۲: مقادیر بحرانی شبیه‌سازی شده آزمون یک طرفه  $ILLR_{n-r;n}^{(2)}$  در سطوح ۵٪ و ۱۰٪؛ به ازای مقادیر مختلف  $n$  تحت توزیع وایبول.

$p$	$\alpha$	$n$						
		۴۰	۵۰	۶۰	۸۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
۰/۹	۰/۱	۶/۶۸۳	۶/۷۴۸	۷/۰۸۴	۷/۳۷۴	۷/۶۳۶	۸/۱۴۳	۸/۶۲۳
	۰/۰۵	۷/۹۷۸	۸/۱۱۱	۸/۴۸۲	۸/۸۲۸	۹/۰۵۶	۹/۸۳۰	۱۰/۴۲۹
۰/۷۵	۰/۱	۵/۲۹۱	۶/۴۷۹	۵/۷۶۵	۶/۲۷۳	۶/۶۴۲	۷/۶۷۰	۸/۳۹۱
	۰/۰۵	۶/۲۵۷	۷/۳۸۵	۶/۹۵۱	۷/۵۴۲	۷/۹۶۹	۹/۵۶۶	۹/۳۳۸

جدول ۳: توان‌های آزمون‌های مختلف در سطح ۵٪ برای توزیع وایبول در مقابل توزیع لگ‌نرمال  $LN(0, 5)$

$p$	آزمون	$n$						
		۴۰	۵۰	۶۰	۸۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۰۰
۰/۹	$ILLR_{r;n}^{(1)}$	۰/۹۳۳	۰/۹۷۶	۰/۹۹۳	۰/۹۹۹	۱	۱	۱
	$ILLR_{r;n}^{(2)}$	۰/۹۲۸	۰/۹۷۳	۰/۹۹۲	۰/۹۹۹	۱	۱	۱
۰/۷۵	$ILLR_{r;n}^{(1)}$	۰/۹۳۰	۰/۸۸۹	۰/۹۹۲	۰/۹۹۹	۱	۱	۱
	$ILLR_{r;n}^{(2)}$	۰/۹۲۸	۰/۸۸۴	۰/۹۹۲	۰/۹۹۹	۱	۱	۱

## مراجع

- [۱] بهبودیان، ج. (۱۳۸۳). آمار ناپارامتری، چاپ چهارم، انتشارات دانشگاه شیراز.
- [2] Bogdonavičius, V.B., Levulienė, R.J., and Nikulin, M.S. (2013), *Exact goodness-of-fit tests for shape-scale families and type II censoring*, Lifetime data analysis, 19, 413-435.
- [3] Blischke, W.R., and Murthy, D.P. (2011), *Reliability: modeling, prediction, and optimization*, Vol. 767, John Wiley & Sons..
- [4] Zhang, J. (2002). *Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology), 64, 281-294.



دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن  
۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۹



## ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم رادار با استفاده از توزیع کاماراسوامی

رسولی، ع ۱ مهدیون، ف ۲ خدابنده لو، ص ۳

گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه زنجان

### چکیده

بایمنی یا اطمینان معیار اصلی برای طراحی یک سیستم است. در این مقاله، هدف بررسی و بهبود قابلیت اطمینان بر مبنای ترکیبی از سیستم‌های سری و موازی است. این سیستم که به سیستم رادار مشهور است، شامل سه مؤلفه است که دو تای آن موازی و دیگری به طور سری در سیستم قرار گرفته است. تابع قابلیت اطمینان سیستم بر مبنای توزیع کاماراسوامی مطالعه گردیده است. سپس از سه روش بهبود برای افزایش قابلیت اطمینان سیستم با در نظر گرفتن مجموعه‌های مختلف از مؤلفه‌ها استفاده می‌کنیم. معادلات قابلیت اعتماد مورد نظر را محاسبه کرده و برای مقایسه کردن روش‌های بهبود از تحلیل داده‌ها کمک گرفته ایم. در پایان نتیجه گیری را بر اساس مثال‌های عددی انجام داده‌ایم.

**کلمات کلیدی:** قابلیت اطمینان، روش بهبود، توزیع کاماراسوامی، مؤلفه‌ی سری و موازی، سیستم رادار

## ۱ پیش‌گفتار

صنعت کنونی جهان، امروزه نیازمند سیستم‌های جدیدی است که دارای سطح قابلیت اطمینان بالاتری باشند. بنابراین در ابتدای نظریه‌ی قابلیت اطمینان باید به موضوع اطمینان سیستم یا ایمنی آن توجه شود. روش‌های تحلیل قابلیت اطمینان آماری در ارزیابی عملکرد سیستم در سطح وسیعی از منابع شامل مهندسی الکترونیکی، مکانیکی و غیرنظامی کاربرد دارد. توزیع کاماراسوامی به عنوان یک توزیع انعطاف پذیر با دامنه متغیر متناهی در بازه (۰، ۱) از لحاظ

<sup>۱</sup> rasouli@znu.ac.ir

<sup>۲</sup> f.mahdioun@znu.ac.ir

<sup>۳</sup> s.khodabandeh@znu.ac.ir

درصد عملکرد یک مؤلفه می‌تواند در مباحث قابلیت اطمینان مورد توجه قرار گیرد. با توجه به منابع [۲، ۳، ۴] در این مقاله با استفاده از این توزیع به محاسبه‌ی قابلیت اطمینان سیستم رادار می‌پردازیم. همچنین برای بهبود میزان قابلیت اعتماد از سه روش بهبود استفاده می‌کنیم که به اختصار در زیر بیان می‌شود:

۱- روش کاهش: در این روش احتمال شکست مؤلفه‌ها با ضرب یک عامل کاهش  $\rho$  که  $0 < \rho < 1$ ، کاهش می‌یابند.

۲- روش تکرار گرم: در این روش زیرمجموعه‌ی انتخاب شده از مؤلفه‌های سیستم گرم تکرار خواهد شد یعنی مؤلفه‌ی انتخاب شده برای بهبود سیستم به صورت موازی به آن مؤلفه اضافه می‌شود.

۳- روش تکرار سرد: تفاوت بین این روش و روش تکرار گرم در استفاده از یک سوئیچ در سیستم برای افزودن مؤلفه می‌باشد که این مؤلفه زمانی فعال خواهد شد که مؤلفه‌ی اصلی از کار بیفتد. این در حالی است که در روش تکرار گرم مؤلفه‌ی جدید مستقیماً در سیستم قرار گرفته و فعال می‌شود. [۱، ۵]

در بخش دوم تابع قابلیت اطمینان بر مبنای توزیع کاماراسوامی ارائه گردیده است. در بخش سوم تابع قابلیت اطمینان بهبودیافته سیستم بازنویسی می‌شود. در بخش چهارم تحلیل داده با استفاده از مقادیر مفروض را بیان خواهیم کرد و در بخش پایانی نتیجه‌گیری براساس تحلیل داده‌ها انجام می‌گیرد.

## ۲ تابع قابلیت اعتماد سیستم پیچیده پایه

فرض کنید  $T$  متغیر طول عمر (در اینجا، درصد عملکرد سیستم با گذشت زمان) یک مؤلفه‌ی سیستم از توزیع کاماراسوامی، با تابع چگالی احتمال و توزیع زیر پیروی می‌کند:

$$f(t) = abt^a(1-t^a)^{b-1}, 0 < t < 1$$

$$F(t) = 1 - (1-t^a)^b.$$

همچنین قابلیت اعتماد و تابع نرخ مخاطره مؤلفه مذکور به ترتیب عبارت است از

$$R(t) = p(T > t) = (1-t^a)^b,$$

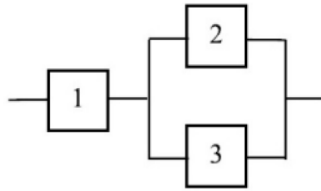
$$h(t) = \frac{abt^a}{(1-t^a)}.$$

حال فرض کنید سیستم زیر مورد توجه است:

زیر بخش‌های زیر برای یافتن توابع قابلیت اطمینان سیستم مذکور با استفاده از چهار مجموعه مختلف برای هر روش بهبود اختصاص می‌یابد که این مجموعه‌ها عبارتند از:

$$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{1, 2\}, A_4 = \{2, 3\}.$$





شکل ۱: سیستم پیچیده‌ی پایه (سیستم رادار)

### ۳ روش‌های بهبود قابلیت اطمینان

الف) روش کاهش (RD) <sup>۱</sup>

در این روش پارامترهای شکست از هر مجموعه از مؤلفه‌ها در عامل  $\rho$  که  $0 < \rho < 1$  است، ضرب می‌شود. به عنوان مثال اگر مجموعه‌ی  $A_1 = \{1\}$  برای بهبود قابلیت اطمینان انتخاب شده باشد، آنگاه تابع قابلیت اطمینان سیستم بهبود یافته به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} R_{A_1}^\rho(t) &= R_1^\rho(t)[R_2(t) + R_3(t) - R_2(t)R_3(t)] \\ &= (1-t^a)^{b_1\rho}[(1-t^a)^{b_2} + (1-t^a)^{b_3} - (1-t^a)^{b_2+b_3}], \end{aligned}$$

که در آن  $R_1^\rho(t)$  تابع قابلیت اطمینان مؤلفه‌ی کاهش است و هم‌چنین  $R_2(t)$  و  $R_3(t)$  به ترتیب توابع قابلیت اطمینان اصلی مؤلفه‌های ۲ و ۳ می‌باشند. با در نظر گرفتن زیر مجموعه‌ی دوم  $A_2 = \{2\}$  سیستم بهبود یافته به صورت  $R_{A_2}^\rho(t)$  بیان می‌شود و در نهایت برای مجموعه‌های  $A_3 = \{1, 2\}$  و  $A_4 = \{2, 3\}$  که به ترتیب ترکیبی از مؤلفه‌های ۱ و ۲ و نیز ۲ و ۳ هستند، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} R_{A_2}^\rho(t) &= R_1(t)[R_2^\rho(t) + R_3(t) - R_2^\rho(t)R_3(t)] \\ &= (1-t^a)^{b_1}[(1-t^a)^{\rho b_2} + (1-t^a)^{b_3} - (1-t^a)^{\rho b_2+b_3}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{A_3}^\rho(t) &= R_1^\rho(t)[R_2^\rho(t) + R_3(t) - R_2^\rho(t)R_3(t)] \\ &= (1-t^a)^{\rho b_1}[(1-t^a)^{\rho b_2} + (1-t^a)^{b_3} - (1-t^a)^{\rho(b_2+b_3)}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{A_4}^\rho(t) &= R_1(t)[R_2^\rho(t) + R_3^\rho(t) - R_2^\rho(t)R_3^\rho(t)] \\ &= (1-t^a)^{b_1}[(1-t^a)^{\rho b_2} + (1-t^a)^{\rho b_3} - (1-t^a)^{\rho(b_2+b_3)}]. \end{aligned}$$

<sup>۱</sup>Reduction Method

ب) روش تکرار گرم (WDM)<sup>۲</sup>  
 در این روش با استفاده از مجموعه‌های مختلف از مؤلفه‌ها تابع قابلیت اطمینان سیستم بهبود یافته را محاسبه می‌کنیم بر اساس مجموعه‌های  $A_1, A_2, A_3$  و  $A_4$  تابع قابلیت اطمینان به ترتیب به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} R_{A_1}^W(t) &= R_1(t)(\Psi - R_1(t))[R_2(t) + R_3(t) - R_2(t)R_3(t)] \\ &= (1 - t^a)^{b_1}(\Psi - (1 - t^a)^{b_1}) \\ &\quad \times [((1 - t^a)^{b_2} + (1 - t^a)^{b_3} - (1 - t^a)^{b_2+b_3})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{A_2}^W(t) &= R_1(t)[R_2(t) + R_3(t)(\Psi - R_2(t))(1 - R_2(t))] \\ &= (1 - t^a)^{b_1} \\ &\quad \times [(1 - t^a)^{b_2} + (1 - t^a)^{b_3}(\Psi - (1 - t^a)^{b_2})(1 - t^a)^{b_2}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{A_3}^W(t) &= R_1(t)(\Psi - R_1(t))[R_2(t) + R_3(t)(\Psi - R_2(t))(1 - R_2(t))] \\ &= (1 - t^a)^{b_1}(\Psi - (1 - t^a)^{b_1}) \\ &\quad \times [(1 - t^a)^{b_2} + (1 - t^a)^{b_3}(\Psi - (1 - t^a)^{b_2})(1 - (1 - t^a)^{b_2})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{A_4}^W(t) &= R_1(t)[R_2(t)(\Psi - R_2(t)) + R_3(t)(\Psi - R_2(t))(1 - R_2(t)(\Psi - R_2(t)))] \\ &= (1 - t^a)^{b_1}[(1 - t^a)^{b_2}(\Psi - (1 - t^a)^{b_2})] \\ &\quad + (1 - t^a)^{b_1}[(1 - t^a)^{b_2}(\Psi - (1 - t^a)^{b_2})(1 - (1 - t^a)^{b_2}(\Psi - (1 - t^a)^{b_2}))]. \end{aligned}$$

ج) روش تکرار سرد (CDM)<sup>۳</sup>  
 در این روش نیز همانند روش تکرار گرم با در نظر گرفتن چهار مجموعه‌ی مختلف از مؤلفه‌ها برای بهبود قابلیت اطمینان سیستم، توابع قابلیت اطمینان به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} R_{A_1}^c(t) &= AR_1(t)[R_2(t) + R_3(t) - R_2(t)R_3(t)] \\ &= A(1 - t^a)^{b_1}[(1 - t^a)^{b_2} + (1 - t^a)^{b_3} - (1 - t^a)^{b_2+b_3}], \end{aligned}$$

<sup>۲</sup> Warm Duplication Method

<sup>۳</sup> Cold Duplication Method

$$\begin{aligned} R_{A_r}^c(t) &= R_{\lambda}(t)[BR_r(t)(1 - R_r(t)) + R_r(t)] \\ &= (1 - t^a)^{b_1} [B(1 - t^a)^{b_r} (1 - (1 - t^a)^{b_r}) + (1 - t^a)^{b_r}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{A_r}^c(t) &= AR_{\lambda}(t)[BR_r(t)(1 - R_r(t)) + R_r(t)] \\ &= A(1 - t^a)^{b_1} [B(1 - t^a)^{b_r} (1 - (1 - t^a)^{b_r}) + (1 - t^a)^{b_r}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{A_r}^c(t) &= R_{\lambda}(t)[BR_r(t) + CR_r(t) - BCR_r(t)R_r(t)] \\ &= (1 - t^a)^{b_1} [B(1 - t^a)^{b_r} + C(1 - t^a)^{b_r} - BC(1 - t^a)^{b_r+b_r}]. \end{aligned}$$

که با استفاده از بسط نیوتن برای  $(1 - t^a)^b$  به صورت:

$$(1 - t^a)^b = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{b}{j} (-1)^j (t^a)^j,$$

مقادیر  $A$ ،  $B$  و  $C$  عبارتند از:

$$A = (1 + b_1 t^a),$$

$$B = (1 + b_r t^a),$$

$$C = (1 + b_r t^a).$$

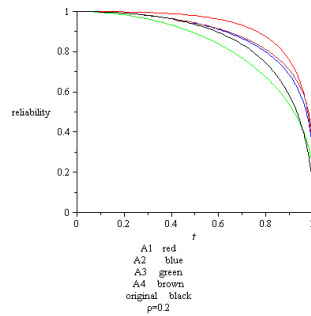
تنها تفاوت این روش با روش تکرار گرم در استفاده از یک سوئیچ در سیستم می‌باشد و با وجود این سوئیچ قابلیت اطمینان سیستم تحت تأثیر قرار می‌گیرد.

## ۴ تحلیل مشاهدات براساس روش‌های بهبود

در این بخش به تحلیل مشاهدات بر اساس روش‌های کاهش با در نظر گرفتن چهار مجموعه‌ی  $A_1$ ،  $A_2$ ،  $A_3$ ،  $A_4$  و  $A_5$  و  $A_6$ ،  $A_7$ ،  $A_8$ ،  $A_9$ ،  $A_{10}$  شکل حاصله به صورت زیر است:

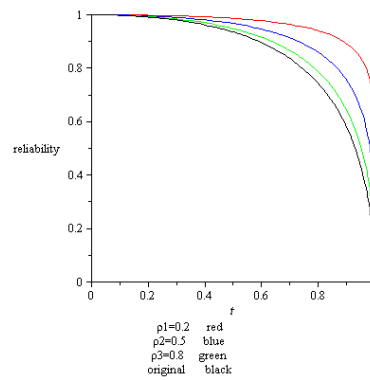
طبق شکل مجموعه‌ی  $A_1$  بهترین سطح قابلیت اطمینان را دارد و بعد از آن مجموعه‌های  $A_2$ ،  $A_3$  و  $A_4$  به ترتیب در جایگاه‌های بعدی قرار می‌گیرند. همچنین میتوان دید که در مقایسه با سیستم اصلی، سطوح قابلیت اطمینان  $A_3$  کمتر می‌باشد. سرانجام تمام سطوح قابلیت اطمینان مجموعه‌ها و نیز روش معمولی در  $t = 1$  به صفر میل می‌کند.

حال عوامل کاهش مختلف برای بهبود قابلیت اطمینان را در این بخش با در نظر گرفتن پارامترهای شکست به صورت  $a = 2$ ،  $b_1 = 0.2$ ،  $b_2 = 0.3$ ،  $b_3 = 0.4$  مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۲: روش کاهش

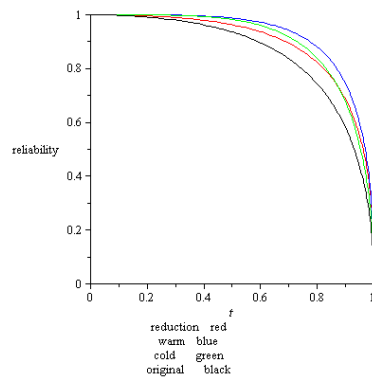
با در نظر گرفتن عوامل کاهش مختلف  $\rho_1 = 0.2$ ،  $\rho_2 = 0.5$  و  $\rho_3 = 0.8$  به عنوان مثال برای مجموعه‌ی  $A_3$  نمودار به صورت زیر به دست می‌آید:



شکل ۳: عوامل کاهش مختلف

با توجه به نمودار، روش کاهش با  $\rho_1 = 0.2$  بهترین سطح را دارا می‌باشد و بعد از آن به ترتیب  $\rho_2 = 0.5$ ،  $\rho_3 = 0.8$  و روش معمولی در جایگاه‌های بعدی قرار می‌گیرند. در ادامه نیز روش‌های بهبود مختلف برای بهبود قابلیت اطمینان سیستم یاد شده با استفاده از تنها یک مؤلفه‌ی  $A_1$  و فرض  $\rho = 0.5$  در نظر گرفته شده است که شکل حاصله به صورت زیر است:

با توجه به نمودار فوق روش گرم بهترین سطح قابلیت اطمینان را دارا است و در این دوره زمانی (حداکثر  $t = 1$ ) روش تکرار سرد و روش کاهش به ترتیب از سطوح قابلیت اطمینان دوم و سوم برخوردارند.



شکل ۴: روش‌های بهبود مختلف

## ۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله محاسبه تابع قابلیت اطمینان یک سیستم با استفاده از سه روش بهبود شامل روش کاهش، روش تکرار گرم و روش تکرار سرد با در نظر گرفتن توزیع کاماراسوامی به عنوان توزیع طول عمر بررسی شد که نشان‌دهنده‌ی بالاتر بودن قابلیت اطمینان سیستم بهبود یافته نسبت به قابلیت اطمینان سیستم اولیه در تمام موارد است. همچنین نشان داده شد که در روش تکرار گرم قابلیت اطمینان سیستم بهتر از روش تکرار سرد می‌باشد.

## مراجع

- [1] Billinton, R., (1992) *Reliability evaluation of engineering systems*, Springer.
- [2] Ezzati, G., Rasouli, A., (2015) *Evaluating system reliability using linear-exponential distribution function*, International Journal of Advanced Statistics and Probability, 3(1) 15-24.
- [3] Kumaraswamy, P., (1980) *Generalised probability density function for double bounded random variables*, J. of Hydrology, 46, 79-88.
- [4] Sarhan, A. M., (2002) *Reliability equivalence with a basic series/parallel system*, Appl. Math. Comput., 132, 115-133.
- [5] Stapelberg, R. F., (2009) *Handbook of Reliability, Availability, Maintainability and Safety in Engineering Design*, Springer.



دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن

۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۵



## برآورد قابلیت اعتماد در توزیع وایبل نمایی شده با استفاده از روش بازنمونه گیری خودگردان

حیدری، س<sup>۱</sup> قربان پور، ف<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام نور تهران  
<sup>۲</sup> گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه علامه طباطبایی

### چکیده

موضوع اصلی تحلیل آماری استخراج حداکثر اطلاعات از داده ها و استنتاج ویژگیهای جامعه است. دیدگاه سنتی برای برآورد اندازه های دقت به ویژه واریانس، گاهی غیر ممکن است. برآورد توزیع نمونه ای نیز عموماً مبتنی بر قضایای حدی است و بنابراین برای حجم نمونه بزرگ اعتبار دارد. روش های بازنمونه گیری، دستیابی به هدف بالا را بدون ضعف های دیدگاه سنتی میسر میسازند. از جمله روش های بازنمونه گیری روش بوت استرپ است که توسط افرون در سال ۱۹۷۹ ارائه شده است.

**کلمات کلیدی:** بوت استرپ، مدل تنش-مقاومت، تحلیل بقا

## ۱ پیش گفتار

افرون در سال ۱۹۷۹ روش بوت استرپ را برای برآورد اندازه دقت و توزیع نمونه ای آماره ها ارائه کرد. این روش بر اساس ایده بازنمونه گیری از داده ها است [۱] که در چند سال اخیر با استفاده از کامپیوتر گسترش فراوانی یافته است. مباحث تحت بررسی بوت استرپ همان مسایل سنتی آمار هستند، تنها ابزار مورد استفاده تغییر یافته است. کامپیوترها این مباحث را قابل انعطاف، سریع، آسان و با حداقل فرضیات ریاضی ممکن میسازند. در آمار بوت استرپ یک متد کامپیوتری است برای نسبت دادن معیار دقت به تخمینهای داده نمونه در این تکنیک تنها با یک روش خیلی ساده

<sup>۱</sup> s\_mheydari@yahoo.com

<sup>۲</sup> farnazghorbanpour@yahoo.com

میتوان تقریباً هر آماره ای از توزیع داده های نمونه را تخمین زد. به طور عمومی این روش از روشهای بازنمونه گیری به حساب می آید. بوت استرپ در واقع ویژگیهای یک برآوردگر مانند واریانس را با استفاده از یک توزیع تقریبی از کل داده های نمونه تخمین میزند. یک انتخاب استاندارد برای توزیع تقریبی، توزیع تجربی داد های مشاهده شده است. در حالتی که بتوان فرض کرد مجموعه ای از مشاهده ها از جمعیتی مستقل و هم توزیع و به طور مساوی توزیع شده هستند، بوت استرپ میتواند با ساخت تعدادی باز نمونه پیاده سازی شود که هر کدام از این بازنمونه ها در واقع نمونه های تصادفی با جایگذاری از مجموعه داده های اصلی هستند. همچنین از بوت استرپ میتوان در ساخت آزمون فرض آماری استفاده کرد. از این روش معمولاً به عنوان جایگزینی برای متد های استنباطی بر پایه فرض های پارامتری هنگامی که در مورد این فرض ها شک داشته باشیم یا در مواردی که استنباط پارامتری غیرممکن باشد یا برای محاسبه خطای استاندارد، فرمول محاسباتی پیچیده شود از بوت استرپ استفاده میشود. یک فایده بزرگ بوت استرپ سادگی آن است. این روش برای تخمین خطای استاندارد و بازه اطمینان برای برآوردگرهای پیچیده پارامترهای توزیع مثل نقطه های صدکی، نسبتها و ضرایب همبستگی بسیار ساده میباشد به علاوه روش مناسبی برای کنترل و بررسی پایداری نتایج است.

## ۲ نمونه گیری تصادفی ساده و نمونه گیری مجموعه ای رتبه دار

### ۱.۲ نمونه گیری تصادفی ساده

یکی از روشهای متداول در نمونه گیری که برای جمع آوری اطلاعات بکار می رود، نمونه گیری تصادفی ساده است که به دو روش " با جایگذاری" و " بدون جایگذاری" انجام می شود. نمونه گیری تصادفی ساده، روش انتخاب  $n$  واحد از جامعه ای به حجم  $N$  واحد است، به قسمی که همه ی  $\binom{N}{n}$  نمونه ای که می توان انتخاب کرد، شانس یکسانی برای انتخاب شدن داشته باشند. در عمل، یک نمونه ی تصادفی ساده، واحد به واحد انتخاب می شود. واحدهای جامعه را از ۱ تا شماره گذاری می کنند، آنگاه یا به وسیله ی جدول اعداد تصادفی و یا بوسیله ی برنامه های کامپیوتری که چنین جدولی را تولید می کنند، متوالیاً  $n$  عدد را که معرف  $n$  واحد نمونه هستند، انتخاب می نمایند. در هر انتخابی، فرآیندی که بکار می رود، باید شانس مساوی برای انتخاب هر واحد جامعه که قبلاً استخراج نشده است، فراهم کند. به راحتی می توان تحقیق کرد که تمام  $\binom{N}{n}$  نمونه ی متمایز ممکن با این روش، شانس یکسان برای انتخاب شدن دارند. اگر در هر انتخاب، واحد انتخاب شده از جامعه کنار رود، روش نمونه گیری، نمونه گیری تصادفی ساده ی بدون جایگذاری نامیده می شود. اما اگر در هر انتخاب، واحد انتخاب شده، دوباره به جامعه برگردانده شود، روش نمونه گیری، نمونه گیری تصادفی ساده ی با جایگذاری نامیده می شود.

#### ۱.۱.۲ برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامترهای توزیع وایبل نمایی شده با بکارگیری نمونه گیری SRS

فرض کنید  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  یک نمونه ی تصادفی  $n$  تایی از توزیع  $EW$  با پارامترهای شکل  $(\alpha, Y)$  و پارامتر مقیاسی  $\lambda$  باشند. پس لگاریتم تابع درستنمایی  $(LL)$  بصورت زیر خواهد بود

$$L(\alpha, \lambda, \gamma) = nLn\alpha + nLn\gamma + n\gamma \ln\lambda + (\gamma - 1) \sum Ln\zeta_i + (\alpha - 1) \quad (1)$$

جهت یافتن برآوردگر ماکزیمم درستنمایی (MLE) پارامترها، از لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به تک تک پارامترها مشتق گرفته و روابط را مساوی صفر قرار می دهیم.

$$\frac{\partial L(\alpha, \lambda, \gamma)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum L_n[1 - \exp(-(\lambda \zeta_i)^\gamma)] = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L(\alpha, \lambda, \gamma)}{\partial \lambda} = \frac{n\gamma}{\lambda} + (\alpha - 1)\gamma\lambda^{\gamma-1} \sum \frac{\exp(-(\lambda \zeta_i)^\gamma)}{1 - \exp(-(\lambda \zeta_i)^\gamma)} \zeta_i^\gamma - \gamma\lambda^{\gamma-1} \sum \zeta_i^\gamma = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L(\alpha, \lambda, \gamma)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\gamma} + nLn\lambda + \sum Ln\zeta_i + (\alpha - 1)\lambda^\gamma \sum \frac{\exp(-(\lambda \zeta_i)^\gamma)}{1 - \exp(-(\lambda \zeta_i)^\gamma)} Ln(\lambda \zeta_i) - \lambda^\gamma \sum \zeta_i^\gamma Ln(\lambda \zeta_i) = 0 \quad (4)$$

حل این معادلات به روشهای غیر عددی ناممکن است، بنابراین از روشهای عددی استفاده می کنیم.

### ۳ شبیه سازی

در این قسمت، با استفاده از نرم افزار Maple نمونه ی تصادفی ساده ی ۲۰ تایی از توزیع وایبل نمایی شده با پارامترهای  $\alpha = 1/5$ ،  $\gamma = 1/5$  و  $\lambda = 1/5$  تولید می کنیم. سپس معادلات ۱، ۲ و ۳ را به صورت یک دستگاه سه معادله ای سه مجهولی در نرم افزار Maple وارد می کنیم، آنگاه از طریق تابع *fsolve*، ریشه های دستگاه را که  $\hat{\alpha}$ ،  $\hat{\lambda}$  و  $\hat{\gamma}$  می باشند، می یابیم.

لازم به ذکر است که تابع *fsolve*، برای حل دستگاه معادلات از انواع روشهای عددی استفاده می کند. تعداد تکرارها برای شبیه سازی، ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است.

### ۴ برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامترهای توزیع وایبل نمایی شده با بکارگیری نمونه گیری RSS

فرض کنید  $\{Y_{ij} : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k\}$  نمونه ی مجموعه ای رتبه دار به اندازه ی  $q = kn$  از جامعه ی وایبل نمایی شده با پارامتر مقیاسی  $\lambda$  و پارامترهای شکل  $\alpha$  و  $\gamma$  باشند و  $n$ ، سایز مجموعه و  $k$ ، تعداد چرخه ها (تکرارها) باشد.

چون این روش در حقیقت از آماره های ترتیبی استفاده می کند، در این صورت تابع چگالی  $Y_{ij}$  بصورت زیر خواهد بود:

$$f_i(y_{ij}) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \alpha \gamma \lambda^\gamma y_{ij}^{\gamma-1} \exp(-\lambda y_{ij})^\gamma [1 - \exp(-\lambda y_{ij})^\gamma]^{i\alpha-1} * (1 - [1 - \exp(-\lambda y_{ij})^\gamma]^\alpha)^{n-i}$$



بنابراین تابع درستنمایی بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \lambda, \gamma, Y) &= \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^n f_i(y_{ij}) \\ &= C \alpha^{nk} \gamma^{nk} \lambda^{nk\gamma} \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^n y_{ij}^{\gamma-1} \exp(-\lambda^\gamma \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n y_{ij}^\gamma) \\ &\quad * \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^n [1 - \exp(-\lambda y_{ij})]^{i\alpha-1} \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^n (1 - [1 - \exp(-\lambda y_{ij}^{n-i})]^\gamma)^\alpha \end{aligned}$$

که  $C$  عدد ثابت است. اگر  $L_n L(\alpha, \lambda, \gamma, Y)$  را با  $L^*$  نشان دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} L^* &= C^* + nk(Ln\alpha + Ln\gamma) + nk\gamma Ln\lambda \\ &\quad + (\gamma - 1) \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n Ln y_{ij} - \lambda^\gamma \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n y_{ij}^\gamma + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (i\alpha - 1) Ln [1 - \exp(-\lambda y_{ij})]^\gamma \\ &\quad + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (n - i) Ln (1 - [1 - \exp(-\lambda y_{ij}^{n-i})]^\gamma) \end{aligned}$$

که  $C^*$  عدد ثابت است. جهت یافتن برآوردگرهای MLE برای  $\alpha$ ،  $\lambda$  و  $\gamma$  از  $L^*$  نسبت به این پارامترها مشتق گرفته و روابط را مساوی صفر قرار می دهیم.

$$\begin{aligned} \bullet &= \frac{\partial L^*}{\partial \alpha} \\ &= \frac{nk}{\alpha} + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n i Ln [1 - \exp(-\lambda y_{ij})]^\gamma \\ &\quad - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (n - i) \frac{[1 - \exp(-\lambda y_{ij})]^\gamma Ln [1 - \exp(-\lambda y_{ij})]}{(1 - [1 - \exp(-\lambda y_{ij}^{n-i})]^\gamma)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \frac{\partial L^*}{\partial \lambda} = \frac{nk\gamma}{\lambda} - \gamma \lambda^{\gamma-1} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n y_{ij}^\gamma \\ &\quad + \gamma \lambda^{\gamma-1} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (i\alpha - 1) \frac{y_{ij}^\gamma \exp(-\lambda y_{ij})^\gamma}{1 - \exp(-\lambda y_{ij}^{n-i})^\gamma} \\ &\quad - \alpha \gamma \lambda^{\gamma-1} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (n - i) \frac{y_{ij}^\gamma \exp(-\lambda y_{ij})^\gamma [1 - \exp(-\lambda y_{ij}^{n-i})]^\alpha}{(1 - [1 - \exp(-\lambda y_{ij}^{n-i})]^\gamma)^\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet &= \frac{\partial L^*}{\partial \gamma} \\ &= \frac{nk}{\gamma} + nk \ln \lambda + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \ln y_{ij} - \lambda^\gamma \ln \lambda \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n y_{ij}^\gamma \\ &\quad - \lambda^\gamma \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n y_{ij}^\gamma \ln y_{ij} \\ &\quad + \lambda^\gamma \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (i\alpha - 1) \frac{y_{ij}^\gamma \ln \lambda y_{ij} \exp(-\lambda y_{ij})^\gamma}{[1 - \exp(-\lambda y_{ij}^{n-i})^\gamma]} \\ &\quad - \alpha^\gamma \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (n-i) \frac{y_{ij}^\gamma \exp(-\lambda y_{ij})^\gamma \ln \lambda y_{ij} [1 - \exp(-\lambda y_{ij}^{n-i})^\gamma]^{\alpha-1}}{(1 - [1 - \exp(-\lambda y_{ij}^{n-i})^\gamma]^\alpha)} \end{aligned}$$

حل این معادلات به روشهای غیر عددی، ناممکن است. بنابراین از روشهای عددی استفاده می کنیم.

## ۵ شبیه سازی

در این قسمت، با استفاده از نرم افزار Maple نمونه‌ی مجموعه‌ای رتبه دار ۲۰ تایی ( $n = s * k = 5 * 4$ ) از توزیع وایبل نمایی شده با پارامترهای  $\lambda = 1/5$  و  $\gamma = 1/5$ ،  $\alpha = 1/5$  تولید می‌کنیم سپس معادلات فوق را به صورت یک دستگاه سه معادله ای سه مجهولی در نرم افزار Maple وارد می کنیم. سپس ریشه های دستگاه را که  $\hat{\lambda}$  و  $\hat{\gamma}$  می باشند، می یابیم. تعداد تکرارها برای شبیه سازی ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است.

## ۶ فاصله اطمینان بوت استرپ برای R

در این بخش، دو فاصله اطمینان مبتنی بر روشهای پارامتری بوت استرپ معرفی می‌شوند: روش صدکی بوت استرپ که از این به بعد boot-p خوانده می‌شود و بر پایه‌ی نظریه افرون (۱۹۸۲) ۱ می‌باشد. روش استیودنتیته بوت استرپ که boot-t خوانده میشود و بر پایه نظریه‌ی هال (۱۹۸۸) ۲ می‌باشد به طور خلاصه برآورد فاصله اطمینان برای R با هر دو روش را نشان میدهیم:

### ۱.۶ فاصله اطمینان صدکی بوت استرپ

الگوریتم برآورد فاصله اطمینان صدکی بوت استرپ به صورت زیر است:

گام اول: با استفاده از نمونه  $Y_1, \dots, Y_n$  و  $X_1, \dots, X_n$  مقادیر  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\lambda}$  را محاسبه می کنیم.

گام دوم: با استفاده از  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\lambda}$  نمونه‌ی بوت استرپ  $X_1, \dots, X_n$  و به طور مشابه با استفاده از مقادیر  $\hat{\beta}$  و  $\hat{\lambda}$  نمونه‌ی بوت استرپ  $Y_1, \dots, Y_n$  را تولید می‌کنیم. حال با استفاده از  $X_1^*, \dots, X_n^*$  و  $Y_1^*, \dots, Y_n^*$  برآورد بوت استرپ را برای R بدست آورده و با  $\hat{R}^*$  نشان می دهیم.

گام سوم: گام دوم را N بار تکرار میکنیم.

گام چهارم: فرض کنید تابع توزیع تجمعی  $\hat{R}^*$  به صورت  $GX(x) = P(\hat{R}^* \leq x)$  تعریف شود، حال اگر قرار دهیم:

می‌شود.  $G^{-1}(x) = R^{boot-P(x)}$ . در این صورت برای هر  $x$  فاصله اطمینان  $(1-\gamma)100$  برای  $R$  به صورت زیر تعریف

$$(\hat{R}_{boot-p}(\frac{\gamma}{4})), (\hat{R}_{boot-p}(1 - \frac{\gamma}{4}))$$

## ۲.۶ فاصله اطمینان استیودنتیده بوت استرپ برای $R$

الگوریتم برآورد فاصله اطمینان استیودنتیده بوت استرپ به صورت زیر میباشد:  
گام اول: با استفاده از نمونه  $Y_1, \dots, Y_n$  و  $X_1, \dots, X_n$  مقادیر  $\hat{\alpha}$ ،  $\hat{\lambda}$  و  $\hat{\beta}$  را محاسبه می‌کنیم.  
گام دوم: با استفاده از  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\lambda}$  نمونه‌ی بوت استرپ  $X_1, \dots, X_n$  و به طور مشابه با استفاده از مقادیر  $\hat{\beta}$  و  $\hat{\lambda}$  نمونه‌ی بوت استرپ  $Y_1, \dots, Y_n$  را تولید می‌کنیم. حال با استفاده از  $X_1^*, \dots, X_n^*$  و  $Y_1^*, \dots, Y_n^*$  برآورد بوت استرپ را برای  $R$  بدست آورده و با  $\hat{R}^*$  نشان می‌دهیم و آماره زیر را تعریف می‌کنیم:

$$T^* = \frac{\sqrt{m}(\hat{R}^* - \hat{R})}{\sqrt{var(\hat{R}^*)}}$$

گام سوم: گام دوم را  $N$  بار تکرار می‌کنیم.  
گام چهارم: با استفاده از  $T^*$  که به تعداد  $N$  بار بدست آمده حدود بالا و پایین را برای فاصله اطمینان  $(1-\gamma)100$  برای  $R$  به صورت زیر تعیین می‌کنیم:

تابع توزیع تجمعی  $T^*$  را به صورت  $H(x) = P(T^* \leq x)$  در نظر می‌گیریم و برای هر  $x$  تعریف می‌کنیم:

$$\hat{R}_{boot-t} = \hat{R} + m^{-\frac{1}{2}} \sqrt{var(\hat{R})} H^{-1}(x)$$

فاصله اطمینان تقریبی  $(1-\gamma)100$  برای  $R$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\hat{R}_{boot-t}(\frac{\gamma}{4})), (\hat{R}_{boot-t}(1 - \frac{\gamma}{4}))$$

## ۳.۶ نتایج شبیه‌سازی

در این بخش شبیه‌سازی برآورد حداکثر درست‌نمایی  $R$  با استفاده از بازنمونه‌گیری خودگردان تحت شرایط مختلف پارامتری بررسی می‌گردد.

برآورد حداکثر درست‌نمایی  $R$  زمانی که  $\lambda$  مجهول است

اریبی  $\frac{1}{el} \sum_{i=1}^{el} (R^* - \hat{R}_i^*)^2$  و میانگین مربعات خطا  $\frac{1}{el} \sum_{i=1}^{el} (R^* - \hat{R}_i^*)^2$  در برآورد حداکثر درست‌نمایی به ازای  $n, m = 15, 20, 25, 30$  و  $\alpha = 1/5, 2, 3/5$  و  $\beta = 1/5, 2, 2/5, 3, 3/5$  و همچنین برای  $\alpha = 1/5, 2, 2/5, 3, 3/5$  و  $\beta = 1/5$  در جداول ۱ و ۲ ارایه شده است. بدون اینکه خدشه‌ای در شبیه‌سازی وارد شود لامبدا و دلتا را برابر یک در نظر گرفته شده‌اند. مقادیر میانگین مربعات خطا در داخل پارانتز نمایش داده شده‌اند.

برآورد حداکثر درست‌نمایی  $\lambda$  به روش تکرار نقطه ثابت با مقدار اولیه ۱ محاسبه می‌شود و روند تکرار زمانی متوقف میشود که اختلاف دو تکرار متوالی کوچکتر از  $10^{-6}$  باشد. پس از برآورد  $\lambda$ ، برآورد  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  در نهایت برآورد

حداکثر درست‌نمایی  $R$  از رابطه  $\hat{R} = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\beta} + \hat{\alpha}}$  محاسبه می‌شود.

با توجه به جداول ۱ و ۲ مشاهده میشود که حتی برای اندازه نمونه کوچک، کارایی MLE بر اساس اریبی و میانگین مربعات خطا در هر دو روش رضایت بخش است. به ازای  $n = m$  زمانی که  $n$  و  $m$  افزایش میابد، میانگین مربعات خطا کاهش میابد. این ویژگی سازگاری MLE پارامتر  $R$  را تایید می کند. همچنین به ازای  $n(m)$  ثابت، با افزایش  $n(m)$  میانگین مربعات خطا کاهش می یابد. همچنین در جدول ۱ مشاهده می شود که با افزایش  $\beta$  میانگین مربعات خطای برآورد حداکثر درستنمایی  $R$  کاهش می یابد. در نتیجه می توان گفت برآورد  $R$  به ازای مقادیر بزرگتر  $\beta$  دقیق تر است. سایر پارامترهای مجهول نیز به روش مشابه محاسبه می شود و نیز با توجه به جداول مشخص میشود که با افزایش  $m(n)$  میانگین مربعات خطا کاهش می یابد.

## مراجع

- [1] Efron, B. (1979), *Bootstrap Methods: Another Look At the Jackknife*, Ann. of Stat. 7- 1-26.
- [2] Efron , B and Tibshirani R.J. (1993), *An introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall/CRC
- [3] Dixit U. J and Nasiri, P. F. (2001), *Estimation of parameters of the exponential distribution in the presence of outliers generated from uniform distribution*, Metron 49. 187-198.
- [4] Gupta, R.D and Kundu, D. (2002), *Generalized exponential distributions*, Statistical Theory and Applications. 101-118.
- [5] Nasiri,P. (2010), *Estimation of the parameters of the generalized exponential distribution in the presence of one outlier generated from uniform distribution*, Applied Mathematical Sciences 48 .2391-2404



دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن  
۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۶



## بررسی قابلیت اعتماد $G$ سیستم‌های $1$ از $N$ با مؤلفه‌های آماده‌باش داغ و سرد از نقطه نظر هزینه

عبدی، ف<sup>۱</sup>

گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان

### چکیده

به منظور افزایش احتمال کاربرد سیستم یک راه‌حل پیشنهادی و مهم بحث تخصیص قطعات مازاد به سیستم است. اخیراً استفاده از مؤلفه‌های افزوده به صورت ذخیره به دلیل نرخ شکست کمتر نسبت به مؤلفه‌های فعال، مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله ابتدا یک سیستم موازی غیر قابل تعمیر با زمان ماموریت معین که در طراحی آن از استراتژی ذخیره داغ و ذخیره سرد به صورت هم‌زمان استفاده شده است، را در نظر می‌گیریم. سپس با استفاده از توزیع زمان شکست هر مؤلفه هزینه و قابلیت اعتماد بهینه در مدت زمان ماموریت سیستم را محاسبه می‌کنیم. علاوه بر این با استفاده از نتایج حاصل شده به بررسی یک مثال عددی از این نوع سیستم می‌پردازیم.

**کلمات کلیدی:** بهینه‌سازی قابلیت اعتماد، سیستم آماده‌باش، ذخیره داغ، ذخیره سرد، هزینه سیستم

### ۱ پیش‌گفتار

بهینه‌سازی هزینه ساخت یکی از مسایل مهم در امر مهندسی قابلیت اعتماد است. اخیراً مطالعات فراوانی در زمینه‌ی طراحی سیستم‌های آماده‌باش تحت این محدودیت توسط محققانی، مانند [۴] و [۵] صورت گرفته است. قطعات ذخیره‌سرد به دلیل نرخ شکست کمتر در مقایسه با استفاده از قطعات ذخیره‌گرم بهینه هستند. اما از نقطه نظر هزینه، هزینه ورود به سیستم در حالت آماده‌باش داغ کمتر از آماده‌باش سرد است. در مقابل هزینه عملکرد قطعات در حالت داغ بیشتر از سرد است. سیستم موازی متشکل از دنباله قطعات  $s(1) \dots s(H)$  متصل موازی ذخیره‌داغ و دنباله قطعات

<sup>۱</sup>fa.abdi92@gmail.com

$s(N) \dots s(H+1)$  متصل موازی ذخیره سرد را در نظر می‌گیریم. کلیه قطعات ذخیره‌داغ از زمان آغاز فرآیند  $t = 0$  در سیستم فعال هستند. اولین مؤلفه ذخیره سرد پس از خراب شدن کلیه قطعات ذخیره‌داغ وارد سیستم می‌شود. سایر مؤلفه‌ها به ترتیب و پس از شکست قطعه‌ی قبلی وارد محیط فعالیت سیستم می‌شوند. در بخش دوم این مقاله قابلیت اعتماد بهینه سیستم مورد بررسی با استفاده از توزیع زمان شکست قطعات بیان می‌شود. سپس در بخش سوم هزینه‌ی بهینه سیستم را با توجه به تنش عملکردی متفاوت قطعات سیستم به دست می‌آوریم. در نهایت در فصل چهارم با استفاده از برنامه‌نویسی رایانه‌ای روابط حاصل شده به بررسی یک مثال کاربردی از سیستم ذکر شده با توزیع زمان شکست و ایبل می‌پردازیم.

## ۲ قابلیت اعتماد سیستم

### ۱.۲ توزیع زمان شکست برای دنباله‌ای از قطعات در سیستم

فرض کنیم  $\tau$  زمان انجام ماموریت سیستم را به  $m$  فاصله زمانی برابر هر یک به طول  $\Delta = \frac{\tau}{m}$  تقسیم می‌کنیم. اگر  $F_j(t)$  تابع توزیع شکست مؤلفه  $j$  ام از دنباله قطعات سیستم باشد، احتمال شکست مؤلفه  $j$  ام در فاصله زمانی  $(\Delta i, \Delta(i+1))$  برابر است با:  $p_j(i) = F_j(\Delta \cdot (i+1)) - F_j(\Delta)$ . در صورتی که علاقه‌مند به بررسی زمان شکست مؤلفه  $j$  ام در حالت گسسته باشیم، تابع جرم احتمال  $T_j$  به فرم یک بردار  $m+1$  مؤلفه‌ای  $p_j = (p_j(0), \dots, p_j(m))$  است. که در آن:

$$p_j(i) = pr \{T_j = \Delta \cdot i\} \quad \forall i = 0, \dots, m$$

با توجه به این که طول عمر هیچ یک از قطعات سیستم بیش از  $\tau$  طول عمر سیستم نمی‌باشد:

$$p_j(m) = p(T_j \geq \tau = \Delta m) = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} p_j(i)$$

$X_j$  را متغیر تصادفی تجمعی زمان فعالیت دنباله قطعات  $s(1), \dots, s(j)$  در سیستم تعریف می‌کنیم. با توجه به تنش عملکردی متفاوت قطعات در سیستم برای هر مؤلفه از دنباله قطعات ذخیره‌گرم سیستم داریم که:

$$X_j = \max(X_{j-1}, T_j)$$

$$Q_j(i) = pr \{X_j = \Delta \cdot i\} = \sum_{k=0}^i pr \{X_{j-1} = \Delta \cdot k\} pr \{T_j = \Delta \cdot i\} + \sum_{k=0}^{i-1} pr \{X_{j-1} = \Delta \cdot i\} pr \{T_j = \Delta \cdot k\} = \sum_{k=0}^i Q_{j-1}(k) p_j(i) + \sum_{k=0}^{i-1} Q_{j-1}(i) p_j(k)$$

و برای هر مؤلفه ذخیره سرد از سیستم داریم که:

$$X_j = X_{j-1} + T_j$$

$$Q_j(i) = pr \{X_j = \Delta \cdot i\} = \sum_{k=0}^i pr \{X_{j-1} = \Delta \cdot k\} \cdot pr \{T_j = \Delta \cdot (i-k)\} = \sum_{k=0}^i Q_{j-1}(k) p_j(i-k) \quad \forall i = 0, \dots, m-1$$

$$Q_j(m) = \sum_{k=0}^{m-1} pr \{X_{j-1} = \Delta \cdot k\} \sum_{n=m-k}^m pr \{T_j = \Delta \cdot n\} = \sum_{k=0}^{m-1} Q_{j-1}(k) \cdot \sum_{n=m-k}^m p_j(n)$$

### قابلیت اعتماد سیستم با توجه به زمان ماموریت

$r_j$  را احتمال این که زمان انجام ماموریت سیستم  $\tau$  پس از  $j$  امین شکست از دنباله قطعات سیستم به اتمام برسد تعریف می‌کنیم. یعنی:  $r_j = pr \{X_{j-1} < \tau, X_j = \tau\}$ . بنابراین قابلیت اعتماد سیستم در زمان تعیین شده برابر

$$R = \sum_{j=1}^N r_j = \sum_{j=1}^N pr \{X_{j-1} < \tau, X_j = \tau\} = \sum_{j=1}^N Q_j(m) \text{ است با:}$$

### ۳ هزینه سیستم

مطابق عملکرد قطعات ذخیره داغ و ذخیره سرد هزینه نهایی استفاده از  $j$  امین قطعه ذخیره داغ که در زمان  $t$  معیوب می‌شود را تابعی خطی از هزینه ثابت ورود مؤلفه به سیستم  $v_j$  و هزینه متغیر با زمان فعالیت مؤلفه  $j$  ام در محیط سیستم  $w_j$  در نظر می‌گیریم. یعنی:  $\theta_j(t) = v_j + w_j \cdot t$ . هزینه نهایی استفاده از  $j$  امین قطعه ی ذخیره سرد که در زمان  $t$  وارد سیستم شده و در زمان  $t$  معیوب می‌شود، برحسب تابعی خطی از هزینه ثابت ورود مؤلفه به سیستم  $V_j$ ، هزینه نگهداری قطعه تا زمان شروع به کار  $W_j$ ، هزینه متغیر با زمان فعالیت مؤلفه در محیط سیستم  $w_j$  بیان می‌شود.

$$\Theta_j(t, t) = V_j + W_j \cdot t + w_j \cdot (t - t_0) \text{ یعنی:}$$

با توجه توزیع زمان شکست قطعات مقدار متوسط هزینه به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$E(\theta_j) = \sum_{i=.}^m p_j(i) \theta_j(\Delta, i) = v_j + \Delta \cdot w_j \cdot \sum_{i=.}^m i \cdot p_j(i) \text{ در قطعات ذخیره داغ:}$$

در قطعات ذخیره سرد:

$$E(\Theta) = \sum_{i=.}^m \sum_{j=.}^m Q_j(i) \cdot p(i - i) \cdot \Theta(\Delta, i, \Delta, i) = \sum_{i=.}^{m-1} Q_j(i) \cdot [V_j + \Delta \cdot i \cdot W_j + \sum_{i=i+1}^m p(i - i) \cdot w_j \cdot \Delta \cdot (i - i)] + Q_j(m) \cdot \Delta \cdot m \cdot W_j = V_j \cdot (1 - Q_j(m)) + \Delta \cdot W_j \cdot \sum_{i=.}^m i \cdot Q_j(i) + \Delta \cdot w_j \cdot \sum_{i=.}^{m-1} Q_j(i) \cdot \sum_{i=i+1}^m (i - i) \cdot p(i - i)$$

$$C = \sum_{j=1}^H E(\theta_j) + \sum_{j=H+1}^N E(\Theta_j) \text{ بنابراین هزینه متوسط کل سیستم برابر است با:}$$

### ۴ مثال کاربردی

سیستم موازی آماده‌باش غیر قابل تعمیر متشکل از ۱۰ قطعه با توزیع نرخ شکست وایبل و با زمان ماموریت ۴۰۰ واحد طراحی شده است. به نحوی که دنباله قطعات  $s(1) \dots s(5)$  ذخیره داغ و  $s(10) \dots s(5)$  ذخیره سرد است. پارامترهای قطعات به صورت زیر ارائه شده است. با توجه به نتایج حاصل شده از مقاله هزینه و قابلیت اعتماد بهینه‌ی سیستم به فرم منحنی زیر ارائه شده است.

دنباله قطعات	$\eta_j$	$\beta_j$	$V_j$	$W_j$	$v_j$	$w_j$
۱	۹۰	۱,۲	۲۰۵۰	۵	۶۰	۱۱
۲	۱۰۰	۱	۲۰۳۰	۵	۴۰	۱۵
۳	۱۵۰	۱,۱	۲۱۰۰	۹	۷۰	۱۳
۴	۸۰	۱	۲۰۵۰	۴	۵۰	۹
۵	۱۱۰	۱,۳	۲۰۸۰	۶	۸۰	۱۲
۶	۷۵	۱	۲۲۵۰	۵	۹۰	۱۰
۷	۱۲۰	۱	۲۱۳۰	۶	۷۰	۱۲
۸	۱۳۰	۱,۱	۲۰۰۰	۹	۷۰	۱۲
۹	۱۴۰	۱	۲۱۵۰	۳	۹۰	۹
۱۰	۱۰۰	۱,۱	۲۲۸۰	۴	۶۰	۸

شکل ۱: نمودار هزینه و قابلیت اعتماد بهینه سیستم

با توجه به نمودار ارایه شده برای مقادیر متفاوت  $m$  با افزایش  $m$  قابلیت اعتماد سیستم افزایش می‌یابد. فرض کنیم علاقه‌مند به طراحی سیستمی با مقدار قابلیت اعتماد  $۰,۹۵۲۲$  و هزینه  $۲۲۵۷۲,۶$  واحد باشیم. با توجه به نمودار واضح است که برای  $m = ۱۰۰$  مقدار قابلیت اعتماد و هزینه بهینه سیستم به ترتیب میزان  $۰,۶۳$  و  $۰,۴۲$  و برای مقدار  $m = ۱۰۰۰$  نسبت به مقدار مورد نظر طراح دون‌برآورد است.

## مراجع

- [1] Coit, DW. (2003), *Maximization of system reliability with a choice of redundancy strategies*, IIE Transactions, 53, 535-543 .
- [2] Elegbede, A. O. C., Chu, C., Adjallah, K.H., and Yalaoui, F. (2003), *Reliability allocation through cost minimization*, IEEE Transactions on Reliability, 52(1), 106-111.
- [3] Levitin, G., Xing, L., and Dai, Y. (2013), *Cold-standby sequencing optimization considering mission cost*, Reliability Engineering and System Safety, 118 , 28-34.
- [4] Levitin, G., Xing, L., and Dai, Y. (2014), *Colds vs. hot standby mission operation cost minimization for 1-out-of-N systems*, European Journal of Operational Research , 118 , 28-34.
- [5] Wang, W., Xiong, J., and Xie, M. (2015), *Cold-standby redundancy allocation problem with degrading components* , International Journal of General Systems , 44 , 876-888.





دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن  
۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۹



## یک آزمون پرتوان تر برای مقایسه ی میانگین های دو جامعه ی پواسن

فرهادی،<sup>۱</sup> چینی پرداز،<sup>۲</sup> ر ۲ آخوند،<sup>۳</sup> م

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهیدچمران اهواز

### چکیده

آزمون های (UMP) آزمون های بهینه ای هستند که متأسفانه در بسیاری از موارد به ویژه در آزمون های یکطرفه و دوطرفه خانواده در توزیع های نمایی چندپارامتری وجود ندارند به همین دلیل معمولاً آزمون های (UMP) ناریب در نظر گرفته می شوند در این مقاله برای مقایسه ی میانگین های دو جامعه ی مستقل پواسن یک آزمون پرتوان تر نسبت به آزمون کلاسیک (UMPU) ارائه شده است که توان آزمون در فضای فرض مخالف همواره از آزمون معمول شرطی بیشتر است.

**کلمات کلیدی:** توزیع پواسن، آزمون های UMP ناریب، خانواده ی نمایی چند پارامتری

## ۱ پیش گفتار

فرض کنید  $X_1, \dots, X_{n_1} \sim poisson(\lambda_1)$  و  $Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim poisson(\lambda_2)$  دو بردار مستقل از توزیع پواسن با پارامترهای مختلف باشند. برای آزمون  $H_0: \lambda_1 - \lambda_2 = d$  در مقابل  $H_1: \lambda_1 - \lambda_2 > d$  می توان نشان داد، آزمون

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{n_1} x_i > c(X, Y) \\ \gamma & \sum_{i=1}^{n_1} x_i = c(X, Y) \\ 0 & \sum_{i=1}^{n_1} x_i < c(X, Y) \end{cases}$$

<sup>۱</sup> e-farhadi@mscst.u.scu.ac.ir

<sup>۲</sup> chinipardaz\_r@scu.ac.ir

<sup>۳</sup>

با اندازه آزمون برابر با

$$E(\phi(X, Y)) = P_p(X_1 > |X_1 + X_2 = t) + \gamma P_p(X_1 = c | X_1 + X_2 = t)$$

یک آزمون  $UMP$  ناریب با اندازه  $\alpha$  و توان

$$\beta_\phi(d) = P_d(X_1 > c | X + Y = t) + P_d(X_1 = c | X + Y = t)$$

خواهد بود. در اینجا  $Y = \sum_{i=1}^{n_2} Y_{i2}$  و  $X = \sum_{i=1}^{n_1} X_{i1}$  خواهد بود فرض  $H$ . با سطح  $\alpha$  برای مقادیری از  $C$  به صورت  $P(X_1 > c | X_1 + X_2) \leq \alpha$  می توان اثبات کرد مقدار  $C$  از  $P(X_1 > c | X_1 + X_2 = t)$  به دست می آید که در آن  $X_1 \sim \beta(t, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2})$  خواهد بود (لهمن و مونرو ۲۰۰۶).  
 پریزیوروسکی و ویلنسکی (۱۹۴۰) همسان سازی در نتایج آزمون نمونه های سری های پواسن را انجام داده است. شیو و بین (۱۹۸۲) اندازه ها و مقایسات توان را برای آزمون های پواسن دو نمونه ای انجام داده است. شان (۲۰۱۵) آزمون غیرشرطی را برای مقایسه ی نسبت دو نمونه ی مستقل پواسن به دست آورده است، کنگ هان (۲۰۰۷) نسبت میانگین های دو جامعه ی مستقل پواسن را با استفاده از آزمون های شرطی و غیرشرطی دقیق مقایسه کرده است. ان جی و گو و تانگ (۲۰۰۶) یک مقایسه برای تفاوت میانگین های دو جامعه ی پواسن را مقایسه کرده است.  
 توان آزمون در حالت شرطی به صورت

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_1 n_1} (n_1 \lambda_1)^{k_1}}{k_1!} \frac{e^{-\lambda_2 n_2} (n_2 \lambda_2)^{k_2}}{k_2!} I \left[ P(X_1 \geq k_1 | k_1 + k_2, P(\lambda_1 / \lambda_2) \leq \alpha) \right]$$

به دست می آید در اینجا

$$p = \frac{n_1 \lambda_1}{n_2 \lambda_2}$$

مقایسه پارامترهای دو جامعه ی پواسن ارائه شده است. در این مقاله یک آزمون پرتوان ترین نیست.  $\alpha \frac{\lambda_1}{n_2 \lambda_2} (1 + \pi /$

### آزمون پیشنهادی

فرض  $H_0 = \lambda_1 - \lambda_2 = d$ . را در مقابل  $H_1 = \lambda_1 - \lambda_2 > d$ . در نظر بگیرید. واریانس تفاوت دو آماره  $X_1/n_1$  و  $X_2/n_2$  عبارتست از:

$$v = var\left(\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}\right) = \frac{\lambda_1}{n_1} + \frac{\lambda_2}{n_2}$$

از آنجا که  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  پارامترهای مجهول هستند بنابراین برای واریانس  $V$  به صورت زیر برآورد می شود

$$\hat{V}_x = \frac{X_1/n_1}{n_1} + \frac{X_2/n_2}{n_2}$$

با جایگذاری  $\lambda_2 + d$  با  $\lambda_1$  این عبارت به صورت :

$$\hat{V}_x = \frac{X_2/n_2}{n_2} + \frac{X_2/n_2}{n_2} + \frac{dn_1}{n_1 + n_2}$$

به دست خواهد آمد حال آماره ی آزمون را به صورت:

$$T_{X_1, X_2} = \frac{X_1/n_1 - X_2/n_2 - d}{\sqrt{\frac{X_1}{n_1} + \frac{X_2}{n_2}}} \quad (1)$$

را در نظر بگیرید، چون آماره مستقل از پارامترهای مجهول است می توان آن را آماره آزمون در نظر گرفت. بنابراین اگر  $T_{k_1, k_2}$  مقدار مشاهده شده ی آماره ی  $T_{X_1, X_2}$  باشد مقدار احتمال به صورت  $P(T_{X_1, X_2} \geq T_{k_1, k_2})$  است اگر آزمون در سطح  $\alpha$  رد شود برای تمام مقادیر  $X_1$  و  $X_2$  که در این رابطه صدق کنند آزمون جدیدی را می سازند. توان این آزمون عبارتست از

$$\beta = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \frac{e^{\lambda_1 n_1} (n_1 \lambda_1)^{k_1}}{k_1!} \frac{e^{\lambda_2 n_2} (n_2 \lambda_2)^{k_2}}{k_2!} \times I \left[ \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \frac{e^{-n_1(\hat{\lambda}_{2k} + d)} (n_1(\hat{\lambda}_{2k} + d))^{x_1}}{x_1!} \frac{e^{-n_2 \hat{\lambda}_{2k}} (n_2 \hat{\lambda}_{2k})^{x_2}}{x_2!} \times [T_{X_1, X_2} \geq T_{k_1, k_2} \leq \alpha] \right].$$

**مقایسه ی توان های دو آزمون**  
از آنجا که در آزمون شرطی کلاسیک

$$C = \{(X_1, X_2); P(X_1 > c | X_1 + X_2 = t \leq \alpha)\}$$

است، بنابراین توان آزمون به صورت

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_1 n_1} (n_1 \lambda_1)^{k_1}}{k_1!} \frac{e^{-\lambda_2 n_2} (n_2 \lambda_2)^{k_2}}{k_2!} I[P(X_1 \geq k_1 | k_1 + k_2, P(\lambda_1/\lambda_2 \geq \alpha))]$$

خواهد بود در آزمون پیشنهادی بالا چون ناحیه ی رد به صورت

$$C = \{(X_1, X_2); P(T_{X_1, X_2} > T_{k_1, k_2} \leq \alpha)\}$$

پس دارای توانی به صورت زیر خواهد بود

$$\beta = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \frac{e^{\lambda_1 n_1} (n_1 \lambda_1)^{k_1}}{k_1!} \frac{e^{\lambda_2 n_2} (n_2 \lambda_2)^{k_2}}{k_2!} \times I \left[ \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \frac{e^{-n_1(\hat{\lambda}_{2k} + d)} (n_1(\hat{\lambda}_{2k} + d))^{x_1}}{x_1!} \frac{e^{-n_2 \hat{\lambda}_{2k}} (n_2 \hat{\lambda}_{2k})^{x_2}}{x_2!} \times [T_{X_1, X_2} \geq T_{k_1, k_2} \leq \alpha] \right].$$

توان دو آزمون را برای فرض  $H_0: \lambda_1 - \lambda_2 = d$  در مقابل  $H_1: \lambda_1 - \lambda_2 > d$  را به ما می دهد.

**نتیجه گیری**

در جدول ۱ نتایج محاسبه توان آزمون شرطی در آزمون پیشنهادی برای فرض  $H_0: \lambda_1 - \lambda_2 = d$  در مقابل  $H_1: \lambda_1 - \lambda_2 > d$  نشان داده شده است.

همچنین در حالت کلی تر به نمودار ۱ توجه کنید و این اندازه ی آزمون برای  $\alpha = 0.05$  و برای دو مقدار  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  متفاوت است. توان آزمون ها بیانگر بیشتر بودن توان آزمون پیشنهادی نسبت به آزمون شرطی  $UMP$  است.

جدول ۱: مقایسه ی اندازه و توانی آزمون ها برای یک سطح و تعداد مشاهدات

آزمون شرطی	height		power	$\lambda_2$	$\lambda_1$
	تعداد نمونه	اندازه			
	۸۹	(۰/۰۴۰)	۹۵	۰/۸۰	۰/۵
	۱۲۳	(۰/۰۴۱)	۱۲۹	۰/۹	۰/۸
	۱۵۵	(۰/۰۴۲)	۱۶۱	۰/۹۵	
	۱۲	(۰/۰۲۹)	۱۴	۰/۸۰	۰/۵
	۱۷	(۰/۰۳۲)	۱۸	۰/۹۰	۱/۵
	۲۱	(۰/۰۳۳)	۲۳	۰/۹۵	

شکل ۱: مقایسه ی توان آزمون های شرطی و آزمون پیشنهادی.

## مراجع

- [1] Przyborowski, J., Wilenski.H (1940), *Homogeneity of results in testing samples from Poisson series*, Biometrika 31, 313-323.
- [2] K. Krishnamoorthy., Jessica Thomson(2004), *A more powerful test for comparing two Poisson Means*. J. Statist. Plann. Inference 119, 23-35.
- [3] .K.T. Nga.,, K.Gua, M.L.Tangb.(2007), *A comparative study of tests for the difference of two Poisson means*. Comput Statist.Data Anal. S51 3085 – 3099.
- [4] Guogen Shan(2015),*Exact unconditional testing procedures for comparing two independent Poisson rates* JSCS, No. 5, 947-955.
- [5] Cong Han(2008),*Comparing two independent incidence rates using conditional and unconditional exact tests*Pharmaceut. Statist. 7, 195-201



## نتایجی از طول عمر سیستم‌ها با مولفه‌های مستقل و غیرهم‌توزیع

کاظمپور، ج ۱      براتپور، س ۲

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

### چکیده

در این مقاله احتمال مشاهده شدن هر یک از مولفه‌ها به عنوان آماره‌ای ترتیبی در سیستم‌های دارای مولفه‌های مستقل و غیرهم‌توزیع محاسبه شده است. به‌علاوه این مهم در خانواده‌هایی خاص از توزیع‌های آماری مورد بررسی قرار گرفته است، که توزیع‌هایی مانند وایبل، نمایی، توانی استاندارد، توانی استاندارد معکوس، پارتو و ... را شامل می‌شود.

**کلمات کلیدی:** آماره‌های ترتیبی، طول عمر سیستم‌ها، مولفه‌های مستقل و غیرهم‌توزیع

## ۱ مقدمه

آماره‌های ترتیبی نقش ویژه‌ای در بررسی عملکرد قابلیت اعتماد سیستم‌ها دارند. در واقع یک سیستم سری تا زمانی که کار خود ادامه می‌دهد که اولین خرابی در آن اتفاق بیفتد، و یک سیستم موازی تا زمانی عمل می‌کند که آخرین مولفه‌ی به کار رفته در سیستم عمل می‌کند. ۱ آماره‌های ترتیبی دیگر نیز در سیستم‌های  $k$  از  $n$  کاربرد دارند. در این مقاله بدون بررسی سیستمی خاص در حالت کلی احتمال قرارگرفتن هر یک از مولفه‌های یک سیستم دارای مولفه‌های مستقل و غیرهم‌توزیع در جایگاه هر آماره‌ی ترتیبی محاسبه شده است، که می‌تواند در بهینه‌سازی طول عمر یک سیستم مفید باشد. ۲ در آخر نیز این احتمالات در خانواده‌ای خاص از توزیع‌های آماری که اغلب در بررسی طول عمر سیستم‌های قابلیت اعتماد نقش ایفا می‌کنند ارائه شده‌اند.

<sup>۱</sup>jaberkazempoor@outlook.com

<sup>۲</sup>baratpour@um.ac.ir

<sup>۱</sup> برای بحث بیشتر در این باره می‌توانید به فصل اول [۲] مراجعه کنید.  
<sup>۲</sup> بحث بیشتر مربوط به بهینه‌سازی را می‌توانید در حالتی خاص در [۳] جستجو کنید.

## ۲ احتمال قرار گرفتن هریک از مولفه‌ها به عنوان آماره‌ای ترتیبی

در این بخش به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که احتمال قرار گرفتن هریک از مولفه‌ها را تحت فرض مستقل و غیرهم‌توزیع بودن به عنوان آماره‌ای ترتیبی محاسبه می‌کند.

**قضیه ۱.** اگر  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای توابع توزیع تجمعی مطلقاً پیوسته  $F_1, \dots, F_n$  باشند، آن‌گاه:

$$P(X_j = X_{1:n}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(u) \prod_{r=1, r \neq j}^n \bar{F}_r(u) du, \quad (1)$$

$$P(X_j = X_{n:n}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(t) \prod_{r=1, r \neq j}^n F_r(t) dt, \quad (2)$$

$$P(X_j = X_{i:n}) = \quad (3)$$

$$\sum_{\pi \in S_n, \pi(i)=j} P\{(X_{\pi(1)} \leq \dots \leq X_{\pi(i-1)} \leq X_j \leq X_{\pi(i+1)} \leq \dots \leq X_n)\},$$

$$i = 2, \dots, n-1 \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

که  $S_n$  مجموعه تمام جایگشت‌های اعداد ۱ تا  $n$  می‌باشد.

**برهان.** رابطه ی (۱):

$$\begin{aligned} P(X_j = X_{1:n}) &= P(X_j \leq \min_{i \neq j} (X_i)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_u^{\infty} g_{X_j, \min_{i \neq j} (X_i)}(u, t) dt du = \int_{\mathbb{R}} f_j(u) \bar{F}_{\min_{i \neq j} (X_i)}(u) \end{aligned}$$

• رابطه ی (۲):

با استفاده از رابطه ۱ و این نکته که  $P(X_j = X_{n:n}) = P(-X_j = (-X)_{1:n})$  برهان این قسمت کامل می‌شود.

□

با توجه به اینکه در سیستم‌های موازی، سیستم با از کارافتادن آخرین مولفه، از کار می‌افتد. بنابراین محاسبه احتمال اینکه هر کدام از مولفه‌ها با چه احتمالی در این جایگاه قرار می‌گیرند، می‌تواند حائز اهمیت باشد. در قضیه‌ی زیر این احتمال را در رده‌ای خاص از توزیع‌های آماری که شامل توزیع توانی استاندارد و ... می‌شود، محاسبه می‌کنیم.

**مثال ۱.** اگر  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل باشند، و  $F(t)$  یک تابع توزیع تجمعی مطلقاً پیوسته باشد، و

$$F_i(t) = F(t)^{\lambda_i}, \quad 0 < \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$P(X_i = X_{n:n}) = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}. \quad \text{داریم: ۱ رابطه به توجه به}$$

بنابراین اگر سیستمی موازی با این مولفه‌ها شروع به کار کند، منطقی به نظر می‌رسد آخرین مولفه‌ای که از کار می‌افتد، مولفه‌ای باشد که مقدار پارامتر بیشتری از تمام مولفه‌ها دارد و این نکته بلافاصله نتیجه می‌دهد که بهینه سازی یک سیستم موازی با مولفه‌های مستقل با در نظر گرفتن غیرهم توزیع بودن این مولفه‌ها اتفاق می‌افتد.

مشابه مثال قبلی با توجه به اینکه در سیستم‌های سری، سیستم با از کار افتادن اولین مولفه، از کار می‌افتد. بنابراین محاسبه احتمال اینکه هر کدام از مولفه‌ها با چه احتمالی در این جایگاه قرار می‌گیرند، می‌تواند حائز اهمیت باشد. در قضیه‌ی زیر این احتمال را در رده‌ای خاص از توزیع‌های آماری که شامل توزیع وایبل، نمایی، پارتو، توانی استاندارد معکوس و ... می‌شود، محاسبه می‌کنیم.

**مثال ۲.** اگر  $X_1, \dots, X_n$  متغیرهای تصادفی مستقل باشند، و  $F(t)$  یک تابع توزیع تجمعی مطلقاً پیوسته باشد، و

$$F_i(t) = 1 - (1 - F(t))^{\lambda_i}, \quad 0 < \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$P(X_i = X_{1:n}) = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}. \quad \text{داریم: ۲ رابطه به توجه به}$$

بنابراین اگر سیستمی سری با این مولفه‌ها شروع به کار کند، منطقی به نظر می‌رسد اولین مولفه‌ای که از کار می‌افتد، مولفه‌ای باشد که مقدار پارامتر کمتری از تمام مولفه‌ها دارد و این نکته بلافاصله نتیجه می‌دهد که بهینه سازی یک سیستم سری با مولفه‌های مستقل با در نظر گرفتن هم توزیع بودن این مولفه‌ها اتفاق می‌افتد.

اکنون به بیان لمی می‌پردازیم که ما را قادر به محاسبه‌ی تمام روابط ۱ و ۲ در دو رده‌ای از توزیع‌های آماری می‌سازد که در مثال‌های ۴ و ۵ ذکر شدند.

**لم ۱.** اگر  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  اعدادی حقیقی باشند، آن‌گاه:

$$\prod_{i=1}^n (1 - x^{\alpha_i}) = 1 + (-1)^n x^{\sum_{i=1}^n \alpha_i} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j}}{j!} \sum_{\pi \in S_{n,r}} x^{\sum_{\pi \in S_{n,r}} \alpha_{\pi(r)}}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

که در آن  $\pi \in S_{n,r} = \pi \in S_n, r \neq n - j + 1, \dots, n$

با استفاده از این لم می‌توان احتمالات محاسبه شده در مثال‌های ۴ و ۵ را گسترش داد.

نتیجه ۳. اگر شرایط مثال ۴، برقرار باشد، آنگاه:

$$P(X_i = X_{1:n}) = 1 + (-1)^{n-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-j}}{j!} \sum_{\pi \in S_{n,r}} \frac{\lambda_r}{\lambda_r + \sum \beta_{\pi(r)}}.$$

$$\beta_k = \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, j-1,$$

$$\beta_k = \lambda_{k-1}, \quad k = j+1, j+2, \dots, n.$$

که

نتیجه ۴. اگر شرایط مثال ۵، برقرار باشد، آنگاه:

$$P(X_i = X_{n:n}) = 1 + (-1)^{n-1} \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-j}}{j!} \sum_{\pi \in S_{n,r}} \frac{\lambda_r}{\lambda_r + \sum \beta_{\pi(r)}}.$$

$$\beta_k = \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots, j-1,$$

$$\beta_k = \lambda_{k-1}, \quad k = j+1, j+2, \dots, n.$$

که

حالت خاصی از نتیجه ۴ را می‌توانید در [۱] برای توزیع نمایی با توضیحات مفیدی راجع به بهینه‌سازی پیدا کنید. به‌علاوه حالت خاصی از موارد گفته‌شده در قضیه ۱ را می‌توان تحت عنوان داده‌ی پرت ادامه داد و بخصوص در توزیع‌های ذکرشده در چکیده نتایج جالبی از آنها استنتاج می‌شود.

## مراجع

- [1] Balakrishnan, N. Cramer, E. (2008), Progressive censoring from heterogeneous distributions with applications to robustness, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 60, 151-171.
- [2] Barlow, R. E. Proschan, F. (1981), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing Probability Models*, To Begin With: Silver Spring, Maryland.
- [3] Burkschat, M. Cramer, E. Kamps, U. (2006), On optimal schemes in progressive censoring, *Statistics and Probability Letters*. 76, 1032-1036.





دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن  
۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۶



## مروری بر قابلیت اعتماد چندکی

کنارنگی، ط ۱ رزمخواه، م ۲

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

### چکیده

در این مقاله، ابتدا کلاسی از توزیع‌ها را بر اساس تابع میانگین باقی مانده عمر چندکی خطی معکوس بررسی و برخی از ویژگی‌های قابلیت اعتماد آن را بیان می‌کنیم. سپس کلاس جدیدی از توزیع‌ها با تابع میانگین باقی مانده عمر چندکی درجه دوم را معرفی می‌کنیم و برخی از ویژگی‌های آن را بدست می‌آوریم. در پایان نتیجه‌گیری انجام می‌دهیم.

**کلمات کلیدی:** تابع میانگین باقی مانده چندکی، تابع نرخ خطر چندکی، تابع چگالی چندکی، تابع واریانس باقی مانده طول عمر، تبدیل زمان کل آزمون

## ۱ پیش‌گفتار

در مدل ۲سازی و تجزیه و تحلیل آماری داده‌ها با توزیع‌های احتمالی، دو روش وجود دارد. یکی به واسطه تابع توزیع و دیگری به واسطه تابع چندکی انجام می‌شود. با فرض این‌که متغیر تصادفی  $X$ ، دارای تابع توزیع  $F(X)$  باشد تابع چندکی به صورت زیر تعریف می‌شود [۱]

$$Q(u) = F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}, \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (1)$$

<sup>۱</sup>tayebeh.kenarangi@stu.um.ac.ir

<sup>۲</sup>razmkhah-m@um.ac.ir

در بیشتر مطالعات آماری، مدل‌سازی بر اساس تابع توزیع انجام می‌شود. با این وجود تابع چندکی در مواردی مانند زمانی که داده دور افتاده داریم و یا شکل تابع توزیع معلوم نیست می‌تواند مفید باشد. در بین مفاهیم قابلیت اعتماد، تابع میانگین باقی مانده طول عمر یک اندازه شناخته شده است که برای متغیر تصادفی نامنفی  $X$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$m(x) = E(X - x | X > x) = \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^{\infty} \bar{F}(t) dt. \quad (2)$$

بر اساس تعریف فوق، تابع میانگین باقی مانده عمر در حقیقت متوسط طول عمر یک سیستم را با فرض این که بیشتر از زمان  $x$  کار کرده باشد نشان می‌دهد. با استفاده از این حقیقت که  $F(0)=0$  و  $F(x)$  پیوسته و اکیداً صعودی است اگر تابع میانگین باقی مانده عمر را در نقطه  $Q(u)$  در نظر بگیریم به تابع میانگین باقی مانده عمر چندکی که به صورت زیر تعریف می‌شود خواهیم رسید

$$M(u) = m(Q(u)) = \frac{1}{1-u} \int_u^1 (Q(p) - Q(u)) dp, \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (3)$$

ادامه این مقاله به شرح ذیل ساماندهی شده است. در بخش دوم، کلاسی از توزیع‌ها با تابع میانگین باقی مانده عمر چندکی خطی معکوس را معرفی و در بخش سوم ویژگی‌های قابلیت اعتماد آن را بیان می‌کنیم. در بخش چهارم کلاس جدیدی از توزیع‌ها با تابع میانگین باقی مانده عمر چندکی درجه دوم را معرفی می‌کنیم و در بخش پنجم نتیجه‌گیری انجام می‌دهیم.

## ۲ توصیف کلاس

توزیع میانگین باقی مانده طول عمر چندکی می‌تواند برای برازش یک مجموعه از داده‌ها در نظر گرفته شود. با توجه به این که گاهی فرم تابع توزیع داده‌ها به راحتی قابل دستیابی نیست شاید ساده‌تر باشد که بر اساس تابع چندکی، در مبحث برازش یک توزیع به مجموعه داده‌های واقعی وارد شد. در این بخش، یک کلاس از توزیع‌ها با تابع میانگین باقی مانده طول عمر چندکی خطی معکوس را در نظر می‌گیریم. به عبارتی فرض می‌کنیم [۱]

$$M(u) = \frac{1}{a+bu}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (4)$$

که در آن  $a > 0$  و  $a+b > 0$ . توجه به این نکته حائز اهمیت است که مدل (۳) در عمل برای برازش داده‌های طول عمر می‌تواند انتخاب مناسبی باشد. این مدل بسته به این که  $b$  پارامتری مثبت یا منفی باشد، می‌تواند به ترتیب برای داده‌هایی با نرخ خطر نزولی یا صعودی در نظر گرفته شود.  $M(u)$  به طور یکتا  $Q(u)$  را توسط رابطه زیر تعیین می‌کند

$$Q(u) = M(\cdot) - M(u) + \int_u^1 \frac{M(p)}{1-p} dp. \quad (5)$$

حال با جایگذاری مدل (۳) در رابطه (۷) تابع چندکی خطی معکوس عبارتست از

$$Q(u) = \frac{bu}{a^2 + abu} + \frac{\log\left(\frac{a+bu}{a-au}\right)}{a+b}. \quad (6)$$

با توجه به (۴) تابع چگالی چندکی که از رابطه  $q(u) = \frac{dQ(u)}{du}$  بدست می‌آید، به فرم زیر می‌باشد

$$q(u) = \frac{a+b}{(1-u)(a+bu)^2}. \quad (۷)$$

### ۳ ویژگی‌های قابلیت اعتماد مدل

یکی از اندازه‌های پرکاربرد در قابلیت اعتماد تابع نرخ خطر است که ضابطه چندکی آن به صورت

$$H(u) = h(Q(u)) = \frac{1}{(1-u)q(u)}. \quad (۸)$$

تعریف شده است. بنابراین، با توجه (۵) و (۹) برای مدل خطی معکوس داریم

$$H(u) = \frac{(a+bu)^2}{a+b}, a > 0, a+b > 0, 0 \leq u \leq 1 \quad (۹)$$

می‌باشد. در قضیه زیر رابطه  $M(u)$  و  $H(u)$  بیان شده است.

**قضیه ۱.** متغیر تصادفی  $X$ ، دارای تابع میانگین باقی مانده عمر چندکی خطی معکوس است اگر و تنها اگر

$$H(u) = \frac{A}{M^r(u)}, \quad (۱۰)$$

که  $A$  یک مقدار ثابت مثبت است.

همچنین تابع واریانس باقی مانده طول عمر چندکی که به فرم

$$V(u) = \frac{1}{1-u} \int_u^1 M^r(p) dp. \quad (۱۱)$$

تعریف می‌شود، برای کلاس توزیع‌های (۳) عبارتست از

$$V(u) = \frac{a+b}{a+bu}. \quad (۱۲)$$

توجه شود که بین مدل (۳) و واریانس آن می‌توان رابطه‌ای را که در قضیه زیر آمده است، در نظر گرفت.

**قضیه ۲.** متغیر تصادفی  $X$ ، دارای تابع میانگین باقی مانده عمر چندکی خطی معکوس است اگر و تنها اگر

$$V(u) = K.M(u), \quad (۱۳)$$

که  $k$  یک مقدار ثابت مثبت است.

تبدیل زمان کل آزمون (تبدیل  $TTT$ ) یک ابزار آماری بسیار مشهور است که کاربردهای گسترده‌ای در تجزیه و تحلیل قابلیت اعتماد دارد.

تبدیل  $TTT$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۵]

$$T(u) = \int_0^u (1-p)q(p) dp. \quad (۱۴)$$

و برای کلاس (۳) به صورت

$$T(u) = \frac{(a+b)u}{a(a+bu)}. \quad (15)$$

محاسبه می‌شود. رابطه بین  $M(u)$  و  $T(u)$  در قضیه زیر بیان شده است.

**قضیه ۳.** متغیر تصادفی  $X$ ، دارای تابع میانگین باقی مانده عمر چندکی خطی معکوس است اگر و تنها اگر

$$T(u) = B.u.M(u), \quad (16)$$

که در آن  $B$  یک مقدار ثابت مثبت است.

## ۴ معرفی یک مدل جدید

در بخش دوم خانواده ای از توزیع‌ها را در نظر گرفتیم که برای آن تابع  $M(u)$  به شکل خطی معکوس بود و فقط در شرایطی قابل استفاده بود که نرخ خطر داده‌ها یکنوا باشد. اما در شرایطی که تابع نرخ خطر برای یک سیستم گودالی یا گودالی واژگون باشد منطقی به نظر می‌رسد کلاسی از توزیع‌ها در نظر گرفته شود که این رفتار را نشان دهد. بدین منظور یک فرم درجه دوم برای  $M(u)$  به صورت زیر در نظر گرفته‌ایم

$$M(u) = a + bu + cu^2, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (17)$$

که در آن  $a, b, c$  مقادیر ثابتی هستند طوری که  $c \neq 0$ . حال با استفاده از (۷)، تابع چندکی (۱۷) به صورت زیر بدست می‌آید

$$Q(u) = -(a+b+c) \log(1-u) - (2b+c)u - \frac{cu^2}{2}. \quad (18)$$

همچنین با توجه به (۱۸) تابع چگالی چندکی عبارتست از

$$q(u) = \frac{a+b+c}{1-u} - 2b + (1+u)c. \quad (19)$$

در کلاس (۱۷) می‌توان شاخص‌های توزیع را محاسبه نمود. به عنوان مثال میانه که یک شاخص تمرکز و دامنه میان چارکی ( $IQR$ ) که یک شاخص پراکندگی است به فرم زیر محاسبه می‌شوند

$$M = Q\left(\frac{1}{4}\right) = (a+b+c) \log 2 - b - \frac{5c}{8},$$

(۲۰)

$$\begin{aligned} IQR &= Q\left(\frac{3}{4}\right) - Q\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= (a+b+c) \log 3 - b - \frac{3c}{4}. \end{aligned} \quad (21)$$

به صورت مشابه می‌توان برای سایر خصوصیات توزیع نیز شاخص‌های مناسب ارائه نمود. برای کلاس (۱۷) تابع نرخ خطر با استفاده از رابطه (۹) به صورت زیر بدست می‌آید

$$H(u) = \frac{1}{a + (2u - 1)b + (u^2 - 1)c}. \quad (22)$$

رابطه بین  $M(u)$  و  $H(u)$  برای کلاس (۱۷) در قضیه زیر بیان شده است.

**قضیه ۴.** متغیر تصادفی  $X$ ، دارای تابع میانگین باقی مانده عمر چندکی درجه دوم است اگر و تنها اگر

$$M(u) + bu - D = \frac{1}{H(u)} \quad (23)$$

که  $D$  یک مقدار ثابت مثبت است.

همچنین تبدیل  $TTT$  برای کلاس (۱۷) بنا به (۱۴) به فرم زیر می‌باشد

$$T(u) = au + b(u^2 - u) + \frac{cu^3}{3}. \quad (24)$$

در پایان این بخش لازم به ذکر است که سایر روابط برای کلاس معرفی شده و بررسی روابط بین مشخصه‌های مدل در دست انجام می‌باشد.

## ۵ نتیجه گیری

در این مقاله، ابتدا کلاسی از توزیع‌ها با میانگین باقی مانده عمر چندکی خطی معکوس را مورد مطالعه قرار دادیم. همچنین برخی از ویژگی‌های قابلیت اعتماد آن را بیان کردیم. در ادامه، در راستای این که  $M(u)$  با توجه به تابع نرخ خطر ممکن است در زمان‌های مختلف اشکال متفاوتی داشته باشد کلاس جدیدی را با تابع میانگین باقی مانده عمر چندکی درجه دوم معرفی کردیم.

توجه شود در ادامه مطالب این مقاله می‌توان موارد زیر را مورد بررسی بیشتر قرار داد:

- روشی برای برآورد  $M(u)$  و تعیین این‌که داده‌ها در چه کلاسی قرار می‌گیرند، مشخص نمود.
- روشی برای برآورد پارامترهای هر یک از مدل‌های معرفی شده ارائه نمود.
- آزمون برای تشخیص نیکویی برازش مدل‌های معرفی شده به داده‌های واقعی در نظر گرفت.

## مراجع

- [1] Nair, N.U. and Sankaran, P.G. (2009), *Quantile-Based Reliability Analysis*, Communications in Statistics.Theory and Methods 38(2),222-232.
- [2] Nair, N.U. and Sankaran, P.G. (2013), *Some new applications of the total time on test transforms*, Statistical Methodology 10,93-102.
- [3] Nair, N.U., Sankaran, P.G. and Kumar, B.V. (2008), *Total time on test transforms of order n and their implications in reliability analysis*, Journal of Applied probability 45,1126-1139.



دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن

۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۵



## معرفی خانواده دو متغیره فارلی-گامبل-مورگنسترن-نمایی-بتا

مرزبان، نسترن<sup>۱</sup> محمودی، عیسی<sup>۲</sup> ترابی، حمزه<sup>۳</sup>

گروه آمار، دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد

### چکیده

در این مقاله روش تولید تابع چگالی دو متغیره فارلی-گامبل-مورگنسترن-نمایی-بتا بیان می شود. سپس پارامترهای این توزیع با بهره گیری از روش درستنمایی ماکسیمم به دست می آید و در پایان، ارتباط بین منحنی کانتور تجربی و منحنی کانتور برازش شده بررسی خواهد شد.

**کلمات کلیدی:** توزیع فارلی-گامبل-مورگنسترن، توزیع نمایی، نظریه توزیع، تابع چگالی حاشیه ای

## ۱ پیش گفتار

آرنولد و همکاران [۱] با در نظر گرفتن تبدیل زیر، روشی را برای تولید توزیع چندمتغیره با هسته ی بتا ارائه کردند:

$$\begin{aligned} X_1 &= F_1^{-1}(V_1); \\ X_2 &= F_2^{-1}(V_2|X_1) = F_2^{-1}(V_2|F_1^{-1}(V_1)); \\ &\vdots \\ X_m &= F_m^{-1}(V_m|X_1, \dots, X_{m-1}) \\ &= F_m^{-1}(V_m|F_1^{-1}(V_1), \dots, F_{m-1}^{-1}(V_{m-1}|F_1^{-1}(V_1), \dots)); \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>۱</sup>nastaran.marzban@stu.yazd.ac.ir

<sup>۲</sup>emahmoudi@yazd.ac.ir

<sup>۳</sup>htorabi@yazd.ac.ir

که در آن  $V_i$  متعلق به خانواده  $\text{Beta}(a_i, b_i)$  با تابع چگالی  $f_{a_i, b_i}$ ،  $i = 1, 2, \dots, m$  است و  $F(\cdot) \sim F(\cdot)$  و  $F$  دلخواه است که و به ترتیب بردارهای  $m$  و  $k$  بعدی هستند و همچنین داریم

$$\begin{aligned} F_1(x_1; ) &= P(X_1 \leq x_1), \\ F_2(x_2|x_1; ) &= P(X_2 \leq x_2 | X_1 = x_1), \\ &\vdots \\ F_m(x_m|x_1, \dots, x_{m-1}; ) &= P(X_m \leq x_m | X_i = x_i; i = 1, 2, \dots, m-1). \end{aligned}$$

پس از محاسبه‌ی ژاکوبین، تابع چگالی بردار تصادفی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f(\cdot, \cdot, \cdot) &= f(x_1, x_2, \dots, x_m; ) \\ &\times \prod_{i=1}^m f_{a_i, b_i} \left( F_i(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}; ) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

روشن است که تابع چگالی حاصل بر اساس توزیع‌های شرطی بیان می‌شود و تابع توزیع شرطی همیشه به راحتی محاسبه نمی‌شود؛ از این رو، روش مذکور چندان مناسب نبود و تلاش برای پیدا کردن تابع چگالی چندمتغیره با هسته‌ی بتا ادامه یافت که سرانجام سارابیا و همکاران [۵] سه روش را برای تولید توزیع چند متغیره با هسته‌ی بتا ارائه کردند که این روش‌ها بر پایه‌ی روش‌های تولید توزیع‌های بتای دومتغیره که به ترتیب توسط ال‌کین و لیو [۴]، ال-باسیونی و جونز [۳] و آرنولد و نگ [۲] معرفی شدند، هستند. در این مقاله با در نظر گرفتن تبدیل (۱) توزیع دومتغیره فارلی-گامبل-مورگنسترن-نمایی-بتا معرفی شده و ویژگی‌های آن شرح داده می‌شود. تابع توزیع دومتغیره فارلی-گامبل-مورگنسترن (FGM) چنین است:

$$F(u, v; \gamma) = uv[1 + \gamma(1-u)(1-v)], \quad 0 < u, v < 1, \quad -1 \leq \gamma \leq 1.$$

پس از مشتق‌گیری از تابع توزیع فوق، تابع چگالی متناظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(u, v; \gamma) = [1 + \gamma(2u-1)(2v-1)], \quad 0 < u, v < 1, \quad -1 \leq \gamma \leq 1$$

اگر در تابع چگالی بالا به جای  $u$  و  $v$  به ترتیب قرار دهیم  $u = 1 - e^{-x}$  و  $v = 1 - e^{-y}$ ؛ که در آن  $X$  و  $Y$  هم‌توزیع و متعلق به خانواده نمایی با پارامتر یک هستند، آن‌گاه تابع چگالی توام  $(X, Y)$  برابر است با

$$f(x, y; \gamma) = e^{-x-y}[1 + \gamma(2e^{-x} - 1)(2e^{-y} - 1)], \quad 0 < x, y \quad -1 \leq \gamma \leq 1.$$

با توجه به این که متغیرهای تصادفی حاشیه‌ای دارای توزیع نمایی با پارامتر یک هستند، تابع چگالی  $Y$  به شرط  $X = x$ ،  $f(y|x)$ ، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x, y; \gamma)}{f_X(x)} = \frac{e^{-x-y}[1 + \gamma(2e^{-x} - 1)(2e^{-y} - 1)]}{e^{-x}} \\ &= e^{-y}(1 + \gamma - 2\gamma e^{-x}) - 2\gamma e^{-2y}(1 - 2e^{-x}). \end{aligned}$$

بنابر تعریف تابع توزیع،  $F(y|x)$  را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} F_{Y|X}(y|x) &= P(Y \leq y|x) = \int_0^y [e^{-t}(1 + \gamma - 2\gamma e^{-x}) \\ &\quad - 2\gamma e^{-2t}(1 - 2e^{-x})] dt \\ &= 1 + e^{-2y}(\gamma - 2\gamma e^{-x}) + e^{-y}(2\gamma e^{-x} - \gamma - 1) \end{aligned}$$

با توجه به رابطه‌ی (۲) تابع چگالی دومتغیره فارلی-گامبل-مورگنسترن-نمایی-بتا برابر است با:

$$\begin{aligned} f(x, y; \gamma, a_1, b_1, a_2, b_2) &= e^{-x-y} [1 + \gamma(2e^{-x} - 1)(2e^{-y} - 1)] \\ &\quad \times \frac{(1 - e^{-x})^{(a_1-1)}(e^{-x})^{(b_1-1)}}{B(a_1, b_1)} \\ &\quad \times \left( e^{-2y}(\gamma - 2\gamma e^{-x}) \right. \\ &\quad \left. + e^{-y}(2\gamma e^{-x} - \gamma - 1) + 1 \right)^{a_2-1} \\ &\quad \times \left( -e^{-2y}(\gamma - 2\gamma e^{-x}) \right. \\ &\quad \left. - e^{-y}(2\gamma e^{-x} - \gamma - 1) \right)^{b_2-1} \\ &\quad \times \frac{1}{B(a_2, b_2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

برای سادگی، نماد  $(X, Y) \sim FGMEB(\gamma, a_1, b_1, a_2, b_2)$  را به کار می‌بریم. آرنولد و همکاران [۱]، تابع چگالی دومتغیره‌ی فارلی-گامبل-مورگنسترن-بتا را با در نظر گرفتن تبدیلات رابطه‌ی (۱)، تولید کردند که در آن  $0 < x, y < 1$ . اما در تابع چگالی تولید شده در رابطه‌ی (۳)،  $x, y > 0$ . این ویژگی سبب می‌شود تابع چگالی حاصل برای برازش به داده‌ها نسبت به تابع چگالی تولید شده توسط آرنولد و همکاران، مناسب‌تر باشد. با توجه به تبدیلات رابطه‌ی (۱) و توابع توزیع شرطی،  $X$  و  $Y$  به ترتیب برابر هستند با

$$\begin{aligned} X &= -\log(1 - V_1), \\ Y &= -\log \left( \frac{-(2\gamma e^{-x} - \gamma - 1)}{2(\gamma - 2\gamma e^{-x})} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{(2\gamma e^{-x} - \gamma - 1)^2 - 4(1 - V_2)(1 - 2\gamma e^{-x})}}{2(\gamma - 2\gamma e^{-x})} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

## ۲ دست‌آوردهای پژوهش

در این بخش در آغاز پارامترها را با استفاده از روش درست‌نمایی ماکسیمم برآورد می‌کنیم و سپس به بررسی وابستگی بین  $X$  و  $Y$  می‌پردازیم و در پایان، شکل تابع چگالی، منحنی کانتور تجربی و منحنی کانتور برازش شده رسم می‌شود. **برآورد پارامترها:** یک نمونه ۵۰۰ تایی از توزیع  $FGMEB(0.9, 3, 4, 5, 6)$  با در نظر گرفتن تبدیلات ۴ شبیه‌سازی



می‌کنیم و با استفاده از روش برآورد درستنمایی ماکسیمم ۵ پارامتر موجود را برآورد می‌کنیم. پس از استفاده از روش برآورد درستنمایی ماکسیمم در نرم‌افزار R نتیجه تا سه رقم اعشار به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(\hat{\gamma}, \hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_2) = (-0.883, 2.975, 3.923, 4.892, 5.704),$$

واضح است که برآورد پارامترها به مقدار واقعی نزدیک است و در آن لگاریتم درستنمایی برابر است با ۱۷۲/۳۷. **وابستگی:** اگر تابع وابستگی موضعی را به صورت  $g(x, y) = \frac{\partial^2 \log f(x, y)}{\partial x \partial y}$  تعریف کنیم، آن‌گاه تابع وابستگی موضعی برای خانواده‌ی دو متغیره‌ی فارلی-گامبل-مورگنسترن-نمایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$g(x, y) = \frac{4\gamma e^{-x-y}}{(1 + \gamma(2e^{-x} - 1)(2e^{-y} - 1))^2}.$$

روشن است که اگر  $-1 \leq \gamma \leq 0$ ، آن‌گاه این تابع چگالی دارای قانون معکوس مرتبه‌ی دو است و اگر  $0 \leq \gamma \leq 1$ ، تابع چگالی مذکور دارای ویژگی مثبت تام مرتبه‌ی دو است.

تابع وابستگی موضعی برای خانواده‌ی دو متغیره‌ی فارلی-گامبل-مورگنسترن-نمایی-بتا برابر است با:

$$g^*(x, y) = \frac{2\gamma(a_2 - 1)e^{-x-y}}{(1 - \gamma e^{-y} + 2\gamma e^{-x-y})^2} + \frac{2\gamma(b_2 - 1)e^{-x-y}}{(1 + \gamma - \gamma e^{-y} - 2\gamma e^{-x} + 2\gamma e^{-x-y})^2} + g(x, y).$$

بنابراین رفتار تابع چگالی خانواده‌ی دو متغیره‌ی فارلی-گامبل-مورگنسترن-نمایی-بتا مشابه رفتار خانواده‌ی دو متغیره‌ی فارلی-گامبل-مورگنسترن-نمایی است؛ به عبارتی اگر  $-1 \leq \gamma \leq 0$  آن‌گاه وابستگی  $X$  و  $Y$  از نوع منفی است.

#### شکل تابع چگالی، منحنی کانتور تجربی و منحنی کانتور برازش شده:

در این زیربخش شکل تابع چگالی، منحنی کانتور تجربی و منحنی کانتور برازش داده شده رسم شده است. روشن است که منحنی کانتور برازش شده به خوبی بر روی منحنی کانتور تجربی منطبق است. از روی منحنی کانتور می‌توان نوع وابستگی و چوله به چپ یا راست بودن  $X$  و  $Y$  را تشخیص داد؛ که در اینجا وابستگی بین این دو متغیر از نوع مثبت است زیرا خط  $y = x$  را به راحتی می‌توان به این منحنی کانتور برازش کرد و همچنین هر دو چوله به راست هستند.

شکل ۱: شکل تابع چگالی، منحنی کانتور تجربی و منحنی کانتور برازش داده شده

## مراجع

- [1] Arnold, BC., Castillo, E., Sarabia, JM. (2006), *Families of multivariate distributions involving the Rosenblatt construction.*, J. AM. Stat, Assoc. 101, 1652–1662.
- [2] Arnold, BC., Ng, HKT. (2011), *Flexible bivariate beta distributions*, J. Multivariate Anal. 102, 1194–1202.
- [3] El-Bassouny, AH., Jones, MC. (2009), *A bivariate F distribution with marginals on arbitrary numerator and denominator degrees of freedom, and related bivariate beta and t distribution*, Stat. Methods Appl. 18, 465–481.
- [4] Olkin, I., Liu, R. (2003). *A bivariate beta distribution*, Stat. Probability Lett. 62, 407–412.
- [5] Sarabia, J.M., Prieto, F. and Jorda, V. (2014), *Bivariate beta-generated distributions with applications to well-being data*, Journal of statistical distributions and applications, 1(1), 15.



دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن  
۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۶



## طراحی یک آزمون شتاب دهنده جزئی با در نظر گرفتن سانسور نوع اول برای برآورد پارامترهای تابع توزیع احتمال طول عمر مشاهدات

رمضانی، ر ۱      رمضانی، م ۲

گروه آمار، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان

### چکیده

آزمون های طول عمر برای محصولات با قابلیت اطمینان بالا در یک شرایط عملکردی عادی غالباً زمان بر و هزینه بر هستند زیرا برای رسیدن به یک تعداد شکست قابل قبول برای تحلیل، اجرای آزمون طول عمر طولانی می گردد. در آزمون های طول عمر شتاب دهنده، فاکتور شتاب دهنده معلوم بوده و یا با استفاده از یک مدل ریاضی می توان آن را به دست آورد. ولی در برخی اوقات فاکتور شتاب دهنده معلوم نبوده و یا مدلی برای محاسبه آن وجود ندارد. در چنین مواردی آزمون های شتاب دهنده جزئی راهکار خوبی برای استفاده هستند. در این مقاله یک آزمون شتاب دهنده جزئی با استرس ثابت و با در نظر گرفتن سانسور نوع یک ارائه شده است. فرض بر این است که توزیع احتمالی طول عمر واحدهای تحت آزمون تعمیمی از توزیع وایبل می باشد. برای برآورد پارامترها از روش درستنمایی ماکزیمم استفاده شده است. برای ارزیابی روش نیز از یک مطالعه شبیه سازی مونت کارلو استفاده شده است.

**کلمات کلیدی:** آزمون شتاب دهنده، سانسور نوع یک، توزیع وایبل، شبیه سازی مونت کارلو

## ۱ پیش گفتار

آزمون های طول عمر برای محصولات با قابلیت اطمینان بالا در یک شرایط عملکردی عادی غالباً زمان بر و هزینه بر است زیرا می بایست یک زمان طولانی بگذرد تا تعداد شکست های قابل قبولی برای تحلیل بدست آید. معمولاً

<sup>۱</sup>r\_ramezani@du.ac.ir

<sup>۲</sup>maryamramezani73@gmail.com

از آزمون های شتاب دهنده عمر ALT<sup>۱</sup> برای کسب اطلاعات در مورد چنین محصولاتی در مدت زمان کوتاه و با هزینه ایی کمتر استفاده می گردد. در این آزمونها سیستم تحت شرایط محیطی شدیدتر (افزایش یا کاهش سطح استرس) نسبت به شرایط طبیعی قرار میگیرد، لذا شکست را در یک مدت زمان کوتاهتری در طول برگزاری آزمون می توان مشاهده نمود. اطلاعات بدست آمده از این روش برای پیش بینی مدل طول عمر تحت شرایط استرسی و برآورد خصوصیات توزیع طول عمر تحت شرایط طبیعی بکار گرفته می شود. در مهندسی قابلیت اطمینان اغلب از آزمون های ALT با استرس ثابت استفاده می گردد. [۱] و [۲] یک مرور خوبی بر روی روش شناسی و محاسبات مدل های ALT با استرس ثابت ارائه نموده اند. در [۳]، [۴] و [۵] آزمون های ALT برای سیستم های سری مورد بررسی قرار گرفته است.

در این مقاله فرض بر این است که توزیع احتمالی طول عمر توزیع تعمیم یافته وایبل است. لذا برای به دست آوردن تابع قابلیت اطمینان در شرایط عملکردی عادی از یک آزمون شتاب دهنده جزئی با در نظر گرفتن سانسور نوع یک استفاده شده است. برای برآورد پارامترها نیز از روش ماکزیمم درستنمایی استفاده شده است. با استفاده از یک شبیه سازی مونت کارلو کارایی روش نیز مورد بررسی قرار گرفته است. نمادهای استفاده شده عبارتند از:  $n$  برابر است با تعداد کل واحدهای تحت آزمایش،  $t_c$  زمان سانسور،  $T$  طول عمر در شرایط عادی،  $X$  طول عمر در شرایط شتاب دهنده،  $K = T/X, K > 1$  فاکتور شتاب دهنده،  $t_i$  طول عمر واحد  $i$  ام در شرایط عادی و  $x_j$  طول عمر واحد  $j$  ام در شرایط شتابی می باشد.

## ۲ رویه اجرای آزمون شتاب دهنده جزئی با استرس ثابت

برای اجرای این آزمون ابتدا  $n$  واحد آزمایش به صورت تصادفی به دو بخش با اندازه های  $np$  و  $n(1-p)$  واحد تقسیم می شوند ( $p$  نسبت نمونه است). نمونه اول در شرایط عادی و نمونه بعدی در شرایط استرسی تحت آزمون قرار می گیرد. هر واحد آزمون در هر نمونه تا رسیدن به زمان سانسور  $t_c$  بدون تغییر شرایط در حال کار خواهد بود. فرض بر این است که الف) توزیع طول عمر در شرایط عادی توزیع وایبل تعمیم یافته با توابع چگالی احتمال، قابلیت اطمینان و نرخ خطر ذیل برای  $t, \beta, \eta > 0$  می باشد:

$$f(t) = \beta \eta t^{-(\beta+1)} e^{-\eta t^{-\beta}}, \quad F(t) = e^{-\eta t^{-\beta}}, \quad h(t) = \frac{\beta \eta t^{-(\beta+1)}}{e^{-\eta t^{-\beta}} - 1} \quad (1)$$

ب) زمان های طول عمر  $t_i, i = 1, \dots, n(1-p)$  تحت شرایط کاری عادی مستقل و هم توزیع هستند ج) زمان های طول عمر  $x_j, j = 1, \dots, np$  تحت شرایط شتاب دهنده مستقل و هم توزیع هستند د) زمان های طول عمر  $x_j, t_i$  با توجه به رابطه  $K = T/X, K > 1$ ، تابع چگالی احتمال در شرایط شتاب دهنده عبارت است از:

$$f(x) = \beta K \eta (Kx)^{-(\beta+1)} e^{-\eta (Kx)^{-\beta}} \quad (2)$$

برای برآورد پارامترهای توزیع از روش ماکزیمم درستنمایی استفاده شده است. فرض کنید  $\phi_{ui}$  و  $\phi_{aj}$  که به ترتیب توابع نشانگر در شرایط عادی و شتاب دهنده بصورت ذیل شده باشند:

$$\phi_{ui} = \{i \mid \frac{0.w}{t_i} \leq t_c \quad i = 1, 2, \dots, n(1-p)\} \quad (3)$$

$$\phi_{aj} = \begin{cases} 1 & \text{a.w} \\ x_j \leq t_c & i = 1, 2, \dots, np \end{cases} \quad (4)$$

توابع درستنمایی برای  $(t_i, \phi_{ui})$  و  $(x_j, \phi_{aj})$  عبارتند از:

$$L_u(\tilde{t}, \tilde{\phi}_u | \beta, \eta) = \prod_{i=1}^{n(1-p)} [\beta \eta t_i^{-(\beta+1)} e^{-\eta t_i^{-\beta}}]^{\phi_{ui}} \times [1 - e^{-\eta t_c^{-\beta}}]^{\bar{\phi}_{ui}} \quad (5)$$

$$L_a(\tilde{x}, \tilde{\phi}_a | \beta, \eta, K) = \prod_{j=1}^{nr} [\beta K \eta (K x_j)^{-(\beta+1)} e^{-\eta (K x_j)^{-\beta}}]^{\phi_{aj}} \times [1 - e^{-\eta (K t_c)^{-\beta}}]^{\bar{\phi}_{aj}} \quad (6)$$

بطوریکه  $\bar{\phi}_{aj} = 1 - \phi_{aj}$  و  $\bar{\phi}_{ui} = 1 - \phi_{ui}$ . تابع کلی درستنمایی در شرایط عادی و شتاب دهنده عبارت است از:

$$L(\tilde{t}, \tilde{x} | K, \eta) = L_a(\tilde{x}, \tilde{\phi}_a | \beta, \eta, K) \times L_u(\tilde{t}, \tilde{\phi}_u | \beta, \eta) \quad (7)$$

لگاریتم تابع کلی درستنمایی عبارت است از:

$$l = \ln L = \sum_{j=1}^{np} \phi_{aj} [\ln \beta + \ln K + \ln \eta - (\beta + 1) \ln K - (\beta + 1) \ln x_j - \eta (K x_j)^{-\beta}] \quad (8)$$

$$+ \sum_{j=1}^{np} \bar{\phi}_{aj} [\eta (K t_c)^{-\beta}] + \sum_{i=1}^{n(1-p)} \phi_{ui} [\ln \beta + \ln \eta - (\beta + 1) \ln t_i - \eta t_i^{-\beta}] + \sum_{i=1}^{n(1-p)} \bar{\phi}_{ui} [\eta (t_c)^{-\beta}]$$

برای به دست آوردن برآوردگرهای درستنمایی ماکزیم می بایست دستگاه معادلات غیرخطی ذیل را حل نمود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial l}{\partial K} &= 0 \end{aligned}$$

برای حل این دستگاه معادلات غیر خطی می توان از جعبه ابزار fsolve در نرم افزار MATLAB استفاده نمود.

### ۳ نتایج مطالعه شبیه سازی

برای ارزیابی آزمون طول عمر پیشنهادی در این بخش یک مطالعه شبیه سازی مونت کارلو انجام و نتایج ارائه شده است. در این مطالعه یک مجموعه داده تصادفی با حجم نمونه های 10, 20, 30, 40 n= زمان سنسور  $t_c = 15, 25$  از توزیع وایبل معکوس تولید شده است.

مقادیر پارامترهای توزیع نیز بصورت  $\beta = 0.75, \eta = 0.25, K = 1.4$  فرض شده اند.

برآورد ماکزیم درستنمایی هر یک از پارامترها، انحراف معیار و فاصله اطمینان ۹۵ درصد براساس ۵۰۰ تکرار در جدول [۱] آمده است.

همانطور که در جدول [۱] دیده می شود مقادیر برآورد شده به مقادیر واقعی پارامترها نزدیک بوده و هر چقدر حجم نمونه افزایش یابد انحراف معیار پارامترها نیز کاهش پیدا می کند.

جدول ۱: نتایج برآورد پارامترهای آزمون شتاب دهنده جزئی با استرس ثابت و پارامترهای  $\beta = 0.75, \eta = 0.25, K = 1.4, p = 0.3$

UCL	LCL	SE	MLE	n	$t_c$
۱,۸۱۹۰	۰,۶۱۸۹	۰,۱۱۱۲	۱,۴۲۹۵	K	
۱,۷۷۰۹	۰,۰۵۱۳	۰,۲۰۴۶	۰,۸۷۸۳	$\beta$	۱۰
۰,۶۴۸۲	۰,۰۱۷۱	۰,۰۲۴۹	۰,۲۹۰۶	$\eta$	۱۵
۱,۸۶۸۲	۱,۰۰۶۶	۰,۰۵۰۳	۱,۳۹۹۶	K	
۱,۱۸۳۵	۰,۲۵۰۵	۰,۰۹۰۲	۰,۸۲۳۳	$\beta$	۲۰
۰,۳۹۴۵	۰,۰۸۳۵	۰,۰۱۰۰	۰,۲۷۴۲	$\eta$	
۱,۵۹۶۲	۰,۹۷۲۵	۰,۰۳۲۷	۱,۳۹۳۰	K	
۱,۲۵۱۱	۰,۳۸۶۷	۰,۰۵۸۶	۰,۸۱۰۴	$\beta$	۳۰
۰,۴۱۷۰	۰,۱۲۸۹	۰,۰۰۶۶	۰,۲۶۸۱	$\eta$	۲۵
۱,۸۳۵۳	۱,۱۴۸۷	۰,۰۲۴۶	۱,۳۹۱۹	K	
۰,۹۸۰۹	۰,۳۳۲۴	۰,۰۳۸۱	۰,۷۹۰۸	$\beta$	۴۰
۰,۳۲۶۹	۰,۱۱۰۸	۰,۰۰۴۲	۰,۲۶۲۰	$\eta$	

## مراجع

- [1] Nelson, W. (1990), *Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses*, John Wiley and Sons Inc, New York.
- [2] Meeker, W.Q. and Escobar, L.A. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, John Wiley and Sons Inc, New York.
- [3] Xu, A. and Tang, Y. (2011), *Objective Bayesian analysis of accelerated competing failure models under type-I censoring*, Comput. Stat. Data 55, 2830– 2839.
- [4] Fan, T. and Hsu T. (2014), *Constant stress accelerated life test on a multiple-component series system under Weibull lifetime distributions*, Commun. Stat. Theor. Methods 43, 2370–2383.
- [5] Roya, S. and Mukhopadhyaya C. (2014), *Bayesian accelerated life testing under competing Weibull causes of failure*, Commun. Stat. Theory Methods 43, 2429–2451.



دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن

۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۶



## مدل سازی قابلیت اطمینان سیستم های مکانیکی با چند مد خرابی و با در نظر گرفتن متغیرهای پایشی

رمضانی، ر<sup>۱</sup>

گروه آمار، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان

### چکیده

سیستم های مکانیکی قبل از خرابی، علائمی را از خود نشان می دهند به عنوان مثال افزایش میزان ارتعاش سیستم. بنابراین با پایش برخی متغیرهای سیستم می توان تا حدی زمان خرابی را پیش بینی نمود. همچنین طول عمر در یک سیستم مکانیکی غالباً تحت تاثیر چند مد خرابی می باشد بنابراین برای تحلیل چنین سیستم هایی لازم است ترکیب این مدهای خرابی بنحوی در نظر گرفته شود. در این مقاله از متغیرهای پایشی به عنوان متغیرهای کمکی در یک مدل وایبل آمیخته برای پیش بینی زمان خرابی سیستم های مکانیکی با چند مد خرابی استفاده شده است.

کلمات کلیدی: مدل آمیخته، سیستم های با چند مد خرابی، توزیع وایبل، پایش وضعیت

## ۱ پیش گفتار

برای پیش بینی خرابی در یک سیستم مکانیکی، از داده های طول عمر و یا داده های پایش وضعیت می توان استفاده نمود. در روش های تحلیل قابلیت اطمینان غالباً از داده های گذشته طول عمر برای برآورد تابع توزیع شکست استفاده می شود. داده های طول عمر که مربوط به طول زمان سرویس دهی قبل از خرابی هستند فقط نشان دهنده نتیجه نهایی شکست بوده و برای مدل بندی فرآیند شکست تحت شرایط عملکردی متفاوت مناسب نیستند. اما داده های پایش وضعیت یک سیستم مکانیکی مانند سیگنال ارتعاشات در طول زمان سرویس دهی حاوی اطلاعاتی در مورد دوره فرسایش و زمان خرابی سیستم می باشد. بنابراین برای این که شکست در یک سیستم

<sup>۱</sup>r\_ramezani@du.ac.ir

مکانیکی به درستی تشخیص داده شود نیاز به یک راهکار مناسب برای ترکیب داده های طول عمر و پایش وضعیت می باشد. در [۱] مدل مخاطره پایشی ساده معرفی شده است. در [۲] یک مدل مخاطره پایشی آمیخته معرفی شده که با بکارگیری در زمینه پزشکی توانسته نسبت به مدل مخاطره پایشی ساده نتایج بهتری را نشان دهد. در این مقاله یک مدل مخاطره پایشی وایبل آمیخته برای پیش بینی شکست یک سیستم مکانیکی معرفی شده است. در این مدل داده های طول عمر و پایش وضعیت حاصل از چند مد خرابی برای برآورد توزیع احتمالی طول عمر سیستم استفاده خواهد شد.

## ۲ مدل مخاطره پایشی وایبل آمیخته

در مدل مخاطره پایشی ساده تابع نرخ خطر عبارت است از:

$$h(t, \mathbf{z}_t) = h_0(t) \exp(\gamma \cdot \mathbf{z}_t), \quad (1)$$

بطوریکه  $h_0(t)$  نرخ مخاطره مبنا بوده و وابسته به طول زمان سرویس دهی است،  $\mathbf{z}_t$  مقادیر متغیرهای سیستم تحت پایش در زمان  $t$  و  $\gamma$  بردار ضرایب رگرسیونی می باشد. در مدل مخاطره پایشی ساده،  $\mathbf{z}_t$  یک بردار از متغیرهای کمکی بوده که نرخ مخاطره نسبی سیستم را افزایش و یا کاهش می دهد و  $\gamma$  نیز وزن هر یک از متغیرهای تحت پایش را در فرآیند شکست مشخص می نماید. با توجه به اینکه در مدل بندی نرخ شکست سیستم های مکانیکی غالباً از توزیع وایبل استفاده می شود اگر در مدل مخاطره پایشی ساده، تابع نرخ مخاطره توزیع وایبل به عنوان نرخ مخاطره مبنا در نظر گرفته شود تابع مخاطره مدل مخاطره پایشی وایبل ساده بصورت ذیل بدست می آید:

$$h(t, \mathbf{z}_t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp(\gamma \cdot \mathbf{z}_t). \quad (2)$$

بنابراین تابع قابلیت اطمینان مدل مخاطره پایشی وایبل ساده عبارت است از:

$$R(t, \mathbf{z}_t) = \exp \left[ - \int_0^t h(t, \mathbf{z}_t) dt \right] = \exp \left[ - \left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta \exp(\gamma \cdot \mathbf{z}_t) \right], \quad (3)$$

برای برآورد پارامترها از روش ماکزیمم درستنمایی استفاده شده است. یک سیستم مکانیکی معمولاً آنقدر کار می کند تا خراب شود یا پیش از خرابی کامل تحت تعمیر قرار می گیرد. بنابراین داده های طول عمر در یک سیستم مکانیکی شامل زمان های شکست و زمان های سانسور شده می باشند. تابع درستنمایی بر مبنای این دو نوع داده عبارت است از:

$$L(\beta, \eta, \gamma) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \mathbf{z}_{t_i}) \prod_{j=1}^m R(t_j, \mathbf{z}_{t_j}), \quad (4)$$

$$L(\beta, \eta, \gamma) = \prod_{i=1}^n \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp(\gamma \cdot \mathbf{z}_{t_i}) \prod_{j=1}^m \exp \left[ - \left(\frac{t_j}{\eta}\right)^\beta \exp(\gamma \cdot \mathbf{z}_{t_j}) \right],$$

برای برآورد پارامترها، از رابطه بالا نسبت به پارامترهای  $\beta, \eta, \gamma$  مشتق جزئی گرفته و برابر صفر قرار داده می شود. مدل وایبل تکی برای مدل سازی طول عمر سیستم های مکانیکی با چند مد خرابی مناسب نیست. برای این منظور



مدل وایبل آمیخته ذیل با در نظر گرفتن متغیرهای پایش برای هر مد خرابی پیشنهاد شده است. تابع چگالی احتمال عبارت است از:

$$f(t, \mathbf{z}_t) = \sum_{g=1}^p \lambda_g f_g(t, \mathbf{z}_t), \quad (5)$$

بطوریکه  $f_g(t, z)$  تابع چگالی احتمال  $g$  امین مد خرابی،  $\lambda_g$  میزان نسبت  $g$  امین خرابی در فرآیند شکست و  $p$  بیانگر تعداد مدهای خرابی می باشد. اگر تابع مخاطره  $g$  امین مد خرابی بصورت ذیل باشد:

$$h_g(t, \mathbf{z}_t) = \frac{\beta_g}{\eta_g} \left( \frac{t}{\eta_g} \right)^{\beta_g - 1} \exp(\gamma \cdot \mathbf{z}_t). \quad (6)$$

بنابراین تابع چگالی احتمال زمان خرابی سیستم عبارت است از:

$$f(t, \mathbf{z}_t) = \sum_{g=1}^p \lambda_g \frac{\beta_g}{\eta_g} \left( \frac{t}{\eta_g} \right)^{\beta_g - 1} \exp(\gamma \cdot \mathbf{z}_t) \exp \left[ - \left( \frac{t}{\eta_g} \right)^{\beta_g} \exp(\gamma \cdot \mathbf{z}_t) \right].$$

بنابراین تابع درستنمایی و لگاریتم آن عبارت است از:

$$L(\beta, \eta, \gamma, \lambda) = \prod_{g=1}^p \left( \prod_{i=1}^{n_g} \lambda_g f_g(t_i, \mathbf{z}_{t_i}) \prod_{j=1}^{m_g} \lambda_g R_g(t_j, \mathbf{z}_{t_j}) \right),$$

$$\ln[L(\beta, \eta, \gamma, \lambda)] = \sum_{g=1}^p \left[ (n_g + m_g) \left( \ln \lambda_g + \ln \frac{\beta_g}{\eta_g} \right) + \sum_{i=1}^{n_g} \ln \left( \frac{t_i}{\eta_g} \right)^{\beta_g - 1} + \sum_{i=1}^{n_g} \gamma \cdot \mathbf{z}_{t_i} - \sum_{j=1}^{m_g} \left( \frac{t_j}{\eta_g} \right)^{\beta_g} \exp(\gamma \cdot \mathbf{z}_{t_j}) \right].$$

بنابراین پارامترهای نامعلوم مدل مخاطره نسبی وایبل آمیخته از طریق ماکزیمم کردن رابطه بالا و با استفاده از الگوریتم تکراری معرفی شده در [۳] بدست خواهد آمد.

### ۳ نتایج یک مطالعه موردی

جدول [۱] داده های طول عمر و متغیرهای تحت پایش یک پمپ فشار قوی آب را نشان می دهد. جدول [۲] نتایج برازش دو مدل مخاطره پایشی وایبل ساده و آمیخته را نشان می دهد. همانطور که در جدول [۲] دیده می شود مقدار MSE در مدل وایبل آمیخته بسیار کمتر از وایبل ساده می باشد.

### مراجع

- [1] Sun, Y., Ma, L., Mathew, J., Wang, W. and Zhang, S. (2006), *Mechanical systems hazard estimation using condition monitoring*, Mech.Syst.Signal Process. 20, 1189–1201.

جدول ۱: داده های تجربی طول عمر و متغیرهای تحت پایش یک پمپ فشار قوی آب

شماره	مد خرابی	طول عمر (hr)	فشار خروجی (بار)	ارتعاش (mm/s)	دمای یاتاقان (C°)
۱	نشستی آب رینگ	۱۳۶	۲۱۷,۲	۶,۴	۸۳,۳
۲	نشستی آب رینگ	۳۸۷	۲۱۵,۶	۲۴,۷	۸۸,۷
۳	نشستی آب رینگ	۲۲	۲۱۳,۴	۲۰,۶	۹۵,۵
۴	نشستی آب رینگ	۶۹۸	۲۱۷,۲	۲۰,۸	۹۸
۵	نشستی آب رینگ	۷۷۲	۲۱۷,۱	۱۱,۴	۷۸,۵
۶	نشستی آب رینگ	۱۴۹۵	۲۲۰,۵	۱۱,۴	۷۶,۵
۷	نشستی آب رینگ	۳۲۴	۲۱۹,۴	۱۷,۳	۸۲,۴
۸	نشستی آب رینگ	۱۳۵۷	۲۱۲,۲	۱۱,۳	۹۲,۵
۹	نشستی آب رینگ	۸۶	۲۱۷,۱	۴,۵	۷۸,۱
۱۰	خرابی یاتاقان	۵۴۵	۲۱۳,۴	۲۰,۶	۹۵,۵
۱۱	خرابی یاتاقان	۳۲۴	۲۱۹,۴	۱۷,۳	۸۲,۴
۱۲	خرابی یاتاقان	۱۳۵۷	۲۱۲,۲	۱۱,۳	۹۲,۵
۱۳	خرابی یاتاقان	۱۷۰۹	۲۲۰,۳	۵,۲	۸۴,۶
۱۴	خرابی یاتاقان	۱۶۲۲	۲۱۸,۴	۵,۵	۹۱,۳
۱۵	خرابی یاتاقان	۱۶۹۲	۲۱۳,۸	۱۰,۲	۹۱,۹

جدول ۲: مقایسه نتایج برآورد پارامترهای دو مدل مخاطره پایشی وایبل ساده و آمیخته

MSE	$\gamma_3$	$\gamma_2$	$\gamma_1$	$\lambda$	$\eta_2$	$\beta_2$	$\eta_1$	$\beta_1$	
۳,۵۴	-۳,۲۶	۲,۸۰	۱,۴۴	۰,۶۴	۸۸۷,۴۰	۲,۶۱	۶۲۲,۳۱	۱,۱۳	مدل پایشی وایبل آمیخته
۹,۳۸	-۲,۴۲	۲,۳۷	۰,۸۴	-	-	-	۶۸۳,۴۱	۱,۳۹	مدل پایشی وایبل ساده

[2] Ng, S.K., Mclachlan, G.J., Mathew, J., Yau, K.K.W. and Lee, A.H. (2004), *Modelling the distribution of ischaemic stroke-specific survival time using an EM-based mixture approach with random effects adjustment*, Stat.Med. 23, 2729–2744.

[3] Nelder, J.A., Mead, R. (1965), *A simplex method for function minimization*, Comput.J. 7, 308–313.



## بهینه‌سازی طرح‌های نمونه‌گیری گروهی سانسور شده فزاینده

سعیدی مفرد، م<sup>۱</sup> توانگر، م<sup>۲</sup>

گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان

### چکیده

در این مقاله یک طرح نمونه‌گیری پذیرشی بهینه برای توزیع وایبل با پارامتر مقیاس نامعلوم ارائه می‌شود. طرح ارائه شده ترکیبی از گروه‌بندی واحدها، آزمون مرگ ناگهانی در هر گروه و سانسور گروهی فزاینده می‌باشد. این طرح نمونه‌گیری می‌تواند به‌طور قابل ملاحظه‌ای زمان و هزینه آزمایش را کاهش دهد.

**کلمات کلیدی:** نمونه‌گیری پذیرشی، سانسور فزاینده، توزیع وایبل، بهینه‌سازی

## ۱ پیش‌گفتار

با توجه به حضور و تأثیر عوامل متعدد در فرایندهای تولیدی، ساخت محصولاتی صد در صد سالم و بدون عیب ممکن نیست و از آن جا که کنترل کامل این عوامل ممکن نبوده و از نظر اقتصادی نیز مقرون به صرفه نیست لذا باید کیفیت محصولات تولیدی کنترل شوند. نمونه‌گیری پذیرشی یکی از شیوه‌های انجام این کار است. در نمونه‌گیری پذیرشی تولیدکننده به‌دفعات از محصول خود در مراحل مختلف تولید، نمونه‌گیری کرده و محصولات سالم را به مراحل بعدی ارسال می‌کند، در حالی که محصولات معیوب را تعمیر کرده و یا دور می‌ریزد. در طرح نمونه‌گیری پذیرشی اندازه نمونه و قواعد تصمیم جهت رد یا پذیرش محموله مشخص می‌شوند. با توجه به محدودیت‌های ایجاد شده توسط تولیدکننده و مصرف‌کننده به‌منظور کاهش اندازه نمونه، زمان و هزینه آزمون، بهینه‌سازی طرح‌های نمونه‌گیری پذیرشی یک مسأله ضروری و حیاتی به‌شمار می‌رود.

<sup>۱</sup>m.saeidimofrad@sci.ui.ac.ir

<sup>۲</sup>m.tavangar@stat.ui.ac.ir

با توجه به محدودیت‌های زمان و هزینه معمولاً آزمایشات طول عمر در قابلیت اعتماد پیش از شکست تمام واحدهای نمونه پایان می‌یابند. به‌طور مثال در سانسور نوع II آزمایش پس از مشاهده تعداد شکست از پیش تعیین شده پایان می‌یابد. سانسور نوع II فزاینده طرح سانسور کلی تری است که در آن امکان کنار گذاشتن واحدها در مراحل مختلف آزمایش، پیش از پایان آزمایش وجود دارد. از بالا کریشان و کرامر [۱] می‌توان به‌عنوان یک منبع خوب در زمینه سانسور فزاینده نام برد.

در بسیاری از آزمایشات قابلیت اعتماد، می‌توان گروهی از واحدها را به‌طور همزمان در یک دستگاه آزمایشی آزمون کرد. در طرح نمونه‌گیری پذیرشی ارائه شده در این مقاله، تحلیل‌گر می‌تواند واحدهای آزمایشی را به مجموعه‌های مختلف با اندازه‌های ثابت و مشخص گروه‌بندی نماید. همه واحدها به‌طور همزمان وارد آزمایش شده و تا وقوع اولین شکست در هر گروه، آزمون ادامه می‌یابد و در زمان وقوع هر شکست، تعداد مشخصی از گروه‌ها به‌طور تصادفی از آزمایش کنار گذاشته می‌شوند. این نوع آزمون می‌تواند جهت صرفه‌جویی در هزینه و زمان آزمایش استفاده شود.

هدف ما در این مقاله بهینه‌سازی طرح نمونه‌گیری پذیرشی گروهی سانسور شده فزاینده برای توزیع طول عمر وایبل با پارامتر مقیاس نامعلوم می‌باشد. توزیع وایبل یک مدل آماری انعطاف‌پذیر است که کاربردهای فراوانی در قابلیت اعتماد دارد.

## ۲ نمونه‌گیری گروهی سانسور شده فزاینده

در فرایند تولید یک محصول خاص فرض کنید  $g$  گروه که هر گروه شامل  $s$  واحد است به‌طور تصادفی از مجموعه بزرگی از اقلام انتخاب و به‌طور همزمان تحت طرح سانسور گروهی فزاینده وارد آزمایش شده‌اند. طول عمر یک محصول با متغیر تصادفی  $X$  نشان داده می‌شود. آزمایش با وقوع  $r$  امین شکست پایان می‌یابد. به‌طوری که  $r \leq g$  و هر گروه نیز با وقوع اولین شکستش حذف می‌گردد.  $R_i$  گروه سالم به‌صورت تصادفی در زمان  $i$  امین شکست از آزمایش کنار گذاشته می‌شوند. در واقع پیش از اولین شکست  $g_1 = g$  گروه  $s$  واحدی و پیش از  $i$  امین شکست تنها  $g_i = g - i + 1 - \sum_{j=1}^{i-1} R_j$  گروه در آزمایش باقی می‌مانند به‌طوری که  $i = 2, \dots, r$ . همچنین واضح است که  $0 \leq R_i \leq g_i - 1$  برای  $i = 1, \dots, r-1$ ،  $R_r = g_r - 1$  و  $g - r = \sum_{j=1}^r R_j$ . حال آزمون قابلیت اعتماد را برای  $n = gs$  واحد انتخابی تصادفی تحت الگوی سانسوری بالا با توزیع طول عمر وایبل  $W(\lambda, m)$  در نظر می‌گیریم. توابع چگالی و قابلیت اعتماد این توزیع برای تک متغیر  $X$  به ترتیب به صورت

$$f(x; \lambda, m) = m\lambda^m x^{m-1} \exp\{-(\lambda x)^m\}, \quad x \geq 0 \quad (1)$$

و

$$S(x; \lambda, m) = \Pr(X \geq x) = \exp\{-(\lambda x)^m\}, \quad x \geq 0 \quad (2)$$

خواهند بود.  $m > 0$  پارامتر شکل و  $\lambda > 0$  پارامتر مقیاس است. پارامتر مقیاس نامعلوم فرض شده است. مقدار امید ریاضی  $\mu = E(X)$  به صورت  $\mu = \Gamma(1/m)/(m\lambda)$  محاسبه می‌شود که در آن  $\Gamma(\cdot)$  تابع گاما می‌باشد. فرض کنید  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r)$  بردار زمان‌های شکست مشاهده‌شده و  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_r)$  طرح سانسور گروهی فزاینده باشد. تابع درست‌نمایی مربوط به آزمون بالا به صورت

$$L(\lambda; m) = s^r \prod_{i=1}^r g_i f(X_i; \lambda, m) \{S(X_i; \lambda, m)\}^{sR_i + s - 1}, \lambda > 0. \quad (3)$$

تعریف می‌شود. با توجه به (۱) و (۱) تابع درستنمایی را می‌توان به شکل

$$L(\lambda; m) \propto \lambda^{mr} \exp(-s\lambda^m W), \quad \lambda > 0. \quad (4)$$

نوشت که در آن  $W = \sum_{i=1}^r (R_i + 1) X_i^m = \sum_{i=1}^r g_i (X_i^m - X_{i-1}^m) = \sum_{i=1}^r U_i$ . با استفاده از مشتق لگاریتم تابع درستنمایی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها به شکل  $\hat{\lambda} = (\frac{r}{sW})^{\frac{1}{m}}$  و  $\hat{\mu} = \frac{\Gamma(1/m)}{m} (\frac{sW}{r})^{1/m}$  محاسبه می‌شوند. با توجه به این که  $2s\lambda^m W$  دارای توزیع خی دو با  $2r$  درجه آزادی می‌باشد، توزیع‌های نمونه‌ای  $\hat{\lambda}$  و  $\hat{\mu}$  را به‌سادگی می‌توان به‌دست آورد.

برای آزمون  $H_0: \mu \geq \mu_1$  در مقابل  $H_1: \mu \leq \mu_2$  که در آن  $\mu_1$  مینیمم متوسط طول عمر قابل پذیرش و  $\mu_2$  متوسط طول عمر قابل رد می‌باشد، چون نسبت درستنمایی  $L(\lambda_2; m)/L(\lambda_1; m)$  تابعی غیر نزولی و یکنوا از  $\hat{\mu}$  برای هر  $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$  است پس با توجه به قضیه کارلین-روبین، آزمون  $UMP$  برای  $\hat{\mu}$  به اندازه کافی بزرگ ( $\hat{\mu} \geq c$ ) فرض صفر را می‌پذیرد. بر اساس متوسط عمر ( $\mu$ ) تابع مشخصه عملکرد،  $G_{r,c}(\mu) \equiv G(\mu; r, c, s, m)$ ، به‌صورت

$$G_{r,c}(\mu) = \Pr\left(\frac{\Gamma(1/m)}{m} \left(\frac{sW}{r}\right)^{1/m} \geq c \mid \mu\right) \quad (5)$$

$$= \Pr(2s\lambda^m W \geq 2r(c/\mu)^m), \quad \mu > 0$$

تعریف می‌شود. در اینجا تابع مشخصه عملکرد از  $s, g$  و  $R$  مستقل است، با توجه به صعودی بودن این تابع، اندازه آزمون  $UMP$  به‌صورت  $1 - G_{r,c}(\mu_1) = \inf_{\mu \geq \mu_1} G_{r,c}(\mu) = 1 - \delta$  خواهد بود.

### ۳ بهینه‌سازی طرح‌های نمونه‌گیری گروهی

یک طرح نمونه‌گیری توسط تعداد گروه‌ها ( $g$ )، اندازه هر گروه ( $s$ )، تعداد شکست‌های مشاهده‌شده ( $r$ )، ثابت پذیرشی ( $c$ ) و طرح سانسور گروهی ( $R$ ) مشخص می‌شود. در این بخش مقادیر بهینه برای این مقادیر تحت فرض‌های موجود ارائه می‌شود.

طرح‌های نمونه‌گیری پذیرشی به این منظور استفاده می‌شوند که احتمال‌های رد کالای با کیفیت (ریسک تولیدکننده) و پذیرش کالای بی‌کیفیت (ریسک مصرف‌کننده) که به ترتیب  $\alpha$  و  $\beta$  نامیده می‌شوند ( $\alpha, \beta < 0.5$ )، کاهش یابند. این دو نوع ریسک با استفاده از متوسط عمرهای قابل پذیرش و قابل رد مربوط یعنی  $\mu_1$  و  $\mu_2$  سنجیده می‌شوند. برای بهینه‌سازی طرح نمونه‌گیری، معمولاً میان تولیدکننده و مصرف‌کننده توافقی جهت تعیین  $\alpha, \beta$ ،  $\mu_1$  و  $\mu_2$  صورت می‌گیرد.

در اینجا ریسک‌های تولیدکننده و مصرف‌کننده را به ترتیب  $1 - G_{r,c}(\mu_1)$  و  $G_{r,c}(\mu_2)$  در نظر می‌گیریم. طرح نمونه‌گیری پذیرشی گروهی با کمترین اندازه نمونه تحت قیود  $G_{r,c}(\mu_1) \geq 1 - \alpha$  و  $G_{r,c}(\mu_2) \leq \beta$ ، طرح

بهینه خواهد بود. مسأله بهینه‌سازی جهت تعیین مینیمم تعداد شکست‌ها،  $r$ ، و ثابت پذیرشی مربوط،  $c$ ، یک مسأله برنامه‌ریزی با اعداد صحیح به صورت آمیخته است که می‌توان به شکل

$$\begin{aligned} & \min r \\ & \text{s.t.} \\ & G_{r,c}(\mu_1) \geq 1 - \alpha, \\ & G_{r,c}(\mu_2) \leq \beta, \\ & g, r \in Z^+, \quad g \geq r, \quad c > 0 \end{aligned}$$

فرمول‌بندی کرد به طوری که  $Z^+$  مجموعه اعداد صحیح مثبت است. در واقع ناحیه پذیرش به صورت

$$\Omega_1 = \{(g, r, c) : G_{r,c}(\mu_1) \geq 1 - \alpha, G_{r,c}(\mu_2) \leq \beta, g, r \in Z^+, c > 0\}$$

تعریف می‌شود و مسأله بهینه‌سازی را می‌توان به صورت خلاصه‌تر به شکل  $\min \{r : (g, r, c) \in \Omega_1\}$  نوشت.  $g$ ،  $c$  و متغیرهای طرح می‌باشند به طوری که  $G_{r,c}(\cdot)$  مستقل از  $g$  است و  $g \geq r$ . روابط  $\chi_{r;\alpha}^2 \geq 2r(c/\mu_1)^m$  و  $\chi_{r;\alpha}^2 \geq 2r(c/\mu_1)^m$  با توجه به قیود تعریف شده به سادگی حاصل می‌شوند. مینیمم تعداد شکست‌ها، کوچکترین عدد صحیح مثبت  $r$  خواهد بود به طوری که

$$\mu_1^m \chi_{r;\alpha}^2 \geq \mu_2^m \chi_{r;1-\beta}^2 \quad (6)$$

و ثابت پذیرشی  $c$  می‌تواند هر مقداری در فاصله  $[c_1, c_2]$  اختیار کند که در آن  $c_i = k_i \mu_i$  برای  $i = 1, 2$  که ضرایب پذیرشی  $k_1$  و  $k_2$  به صورت  $k_1 = \{\chi_{r;\alpha}^2 / (2r)\}^{1/m}$  و  $k_2 = \{\chi_{r;1-\beta}^2 / (2r)\}^{1/m}$  تعریف می‌شوند. به طور کلی نقطه میانی فاصله یعنی  $c^* = (c_1 + c_2) / 2$  را می‌توان به عنوان یک انتخاب مناسب و متعادل برای  $c$  در نظر گرفت. به سادگی می‌توان برای  $r$  یک تقریب عالی به دست آورد. با توجه به [۳] بر اساس تبدیل ویلسون-هیلفرتی متغیر تصادفی  $[1 - 1/(9r) + \sqrt{9r} \{\chi_{r;\alpha}^2 / (2r)\}^{1/3}]$  هنگامی که  $r$  خیلی کوچک نباشد، به طور تقریبی دارای توزیع نرمال استاندارد ( $Z$ ) است. بنابراین می‌توان نوشت

$$\chi_{r;\varepsilon}^2 \simeq 2r \{z_\varepsilon / (\sqrt{3r}) - 1/(9r) + 1\}^3, \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (7)$$

از (۵) نتیجه می‌شود برای  $r \geq r_1$  خواهیم داشت  $\mu_1^m \chi_{r_1;\alpha}^2 = \mu_2^m \chi_{r_1;1-\beta}^2$ . به علاوه با توجه به (۷)،  $r_1$  باید به طور تقریبی در رابطه

$$\mu_1^{m/3} \{z_\alpha / (\sqrt{3r_1}) - 1/(9r_1) + 1\} = \mu_2^{m/3} \{-z_\beta / (\sqrt{3r_1}) - 1/(9r_1) + 1\}$$

صدق کند که می‌توان نتیجه گرفت برای  $r_1 \simeq r_2$ ، خواهیم داشت

$$6(\mu_1^{m/3} - \mu_2^{m/3})r_2 + 2(z_\alpha \mu_1^{m/3} + z_\beta \mu_2^{m/3})\sqrt{r_2} - 6(\mu_1^{m/3} - \mu_2^{m/3})/9 = 0$$

بنابراین معادله  $r_2 + 2d\sqrt{r_2} - 1/9 = 0$  حاصل می‌شود که در آن  $d = \frac{z_\alpha \mu_1^{m/3} + z_\beta \mu_2^{m/3}}{6(\mu_1^{m/3} - \mu_2^{m/3})}$ . حال چون  $-d < 0$  پس  $(d^2 + 1/9)^{1/2} - d$  جواب قابل قبول معادله خواهد بود. بنابراین مینیمم تعداد شکست‌ها یعنی  $r$  تقریباً برابر با کوچکترین عدد صحیح مثبت بزرگتر یا مساوی  $r_2$  می‌شود. در نتیجه تقریبی مناسب برای  $r$  که در بسیاری از موارد کاربردی تقریباً برابر با مقدار دقیق است به صورت

$$r \simeq \left[ \left\{ (d^\gamma + 1/9)^{1/\gamma} - d \right\}^2 \right] \quad (8)$$

خواهد بود.

به منظور بررسی تأثیر  $g$ ،  $s$  و  $R$  روی طول مورد انتظار آزمایش ( $ETD$ ) یعنی  $E[X_r]$  مقدار متوسط متغیر تصادفی  $X_r^m$  را در نظر می‌گیریم و با توجه به اینکه  $X_r^m = \sum_{i=1}^r U_i/g_i$  و  $\chi^2_{\gamma} \sim 2s\lambda^m U_i$  به سادگی  $E[X_r^m] = \frac{1}{s\lambda^m} \sum_{i=1}^r \frac{1}{g_i}$  حاصل می‌شود به طوریکه

$$D_1 \leq E[X_r^m] \leq D_2 \quad (9)$$

که در آن  $D_1 = \frac{1}{s\lambda^m} \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{g-i}$  و  $D_2 = \frac{1}{s\lambda^m} \left\{ \frac{1}{g} + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{r-i} \right\}$  مقادیر ماکسیمم و مینیمم  $E[X_r^m]$  یعنی  $D_1$  و  $D_2$  هنگامی حاصل می‌شوند که طرح‌های سانسور گروهی به ترتیب به صورت  $R = (0, \dots, 0, g-r)$  و  $R = (0, \dots, 0, g-r)$  باشند.

مسئله تعیین یک مقدار بهینه برای تعداد گروه‌ها بسیار حائز اهمیت است. یک روش عقلانی در نظر گرفتن مینیمم یک تابع هزینه مناسب است. فرض کنید هزینه آزمون عمر تابعی از واحدهای موجود در آزمون ( $n = gs$ ) و متغیر تصادفی طول آزمایش  $X_r$  باشد یعنی تابع هزینه به صورت  $b_1 X_r + b_2 n$  باشد که در آن  $b_1 > 0$  نشانگر هزینه هر واحد از زمان آزمایش و  $b_2 > 0$  نشانگر هزینه هر واحد آزمایش شده می‌باشد. در این جا طول مورد انتظار آزمایش به مقدار  $\lambda$  و طرح سانسور گروهی  $R$  که هر دو نامعلوم اند بستگی دارد.  $\lambda$  را تقریبی از  $\lambda$ ،  $m = 1$  و  $(D_1 + D_2)/2$  را برآورد  $E[X_r]$  در نظر می‌گیریم. در نتیجه یک برآورد مناسب برای هزینه مورد انتظار آزمون به صورت ( $ETC$ )

$$Q_{r,s}[g] = \frac{b_1}{2s\lambda} \left[ \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{g-i} + \frac{1}{g} + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{r-i} \right] + b_2 gs \quad (10)$$

حاصل می‌شود. حال مقدار  $g$ ی مینیمم‌کننده تابع (۱۰) را برای  $r$  ثابت تعیین می‌کنیم که این یک مسئله برنامه‌ریزی اعداد صحیح به صورت

$$\begin{aligned} & \min Q_{r,s}[g] \\ & \text{s.t.} \\ & g \geq r, \quad g \in Z^+ \end{aligned}$$

می‌باشد. فرناندز و همکاران [۲] نشان دادند به طور کلی  $\left[ \frac{r-2 + \sqrt{(r-2)^2 + 4(r-1+r/\Delta)}}{2} \right]$  یک تقریب عالی برای انتخاب بهینه تعداد گروه‌ها می‌باشد که در آن  $\Delta = 2b_2 s^2 \lambda / b_1$ .

برای طرح سانسور گروهی  $R = (0, \dots, 0, g - r)$  که مینیمم زمان مورد انتظار آزمایش را نتیجه می‌دهد، برآورد مناسب برای ETC به صورت  $Q_{r,s}^*[g] = \frac{b_1}{s\lambda} \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{g-i} + b_2 g s$  خواهد بود و در نتیجه مقدار بهینه  $g$  به سادگی به صورت

$$g = \left\lceil \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{b_1 r}{b_2 s^2 \lambda}} - 1 \right\rceil \quad (11)$$

حاصل می‌شود.

#### ۴ مثال کاربردی

فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  طول عمر یک ژيروسکوپ را نشان دهد و طبق توافق میان تولیدکننده و مصرف‌کننده بهینه‌سازی طرح نمونه‌گیری پذیرشی گروهی سانسور شده فزاینده در نظر گرفته شده است به طوری که احتمال‌های مربوط به رد یک ژيروسکوپ خوب و پذیرش یک ژيروسکوپ بد به ترتیب حداکثر  $\alpha = 0.05$  و  $\beta = 0.10$  باشند. به علاوه فرض شده یک محموله از ژيروسکوپ‌ها قابل پذیرش اند اگر متوسط عمر واحدها بیشتر یا مساوی  $\mu_1 = 30$  روز باشند و هنگامی که متوسط عمر ژيروسکوپ‌ها کمتر یا مساوی  $\mu_2 = 15$  روز باشد محموله قابل رد خواهد بود. فرض کنید طول عمر یک ژيروسکوپ دارای توزیع  $W(\lambda, m)$  با پارامتر شکل  $m = 1$  باشد.

جدول ۱: مقدار تقریبی و دقیق تعداد بهینه شکست‌ها

ضرایب پذیرشی		تعداد شکست‌ها		$\beta$	$\alpha$
$k_2$	$k_1$	دقیق	تقریبی		
۱/۲۹۳۳	۰/۶۴۹۱۷	۳۵	۳۵	۰/۰۵	۰/۰۱
۱/۲۱۵۹	۰/۷۳۰۴۲	۶۳	۶۳		
۱/۱۵۰۳	۰/۸۰۵۲۱	۱۲۷	۱۲۸		
۱/۰۹۳۴	۰/۸۷۴۹۴	۳۲۲	۳۲۲		
۱/۰۴۳۹	۰/۹۳۹۵۱	۱۴۳۰	۱۴۳۰		
۱/۲۴۰۰	۰/۶۲۴۷۵	۳۰	۳۰	۰/۱۰	
۱/۱۷۹۶	۰/۷۰۸۴۱	۵۳	۵۳		
۱/۱۲۵۷	۰/۷۸۸۹۳	۱۰۷	۱۰۷		
۱/۰۷۹۰	۰/۸۶۳۴۰	۲۶۸	۲۶۸		
۱/۰۳۷۴	۰/۹۳۳۶۹	۱۱۸۶	۱۱۸۶		
۱/۳۶۵۹	۰/۶۸۳۴۶	۲۳	۲۳	۰/۰۵	۰/۰۵
۱/۲۶۶۶	۰/۷۶۰۴۳	۴۲	۴۲		
۱/۱۸۳۷	۰/۸۲۹۴۸	۸۶	۸۶		
۱/۱۱۳۹	۰/۸۹۱۲۶	۲۱۸	۲۱۸		
۱/۰۵۳۲	۰/۹۴۷۹۴	۹۷۶	۹۷۶		
۱/۳۰۳۰	۰/۶۵۴۸۴	۱۹	۱۹	۰/۱۰	
۱/۲۲۵۱	۰/۷۳۵۵۹	۳۴	۳۴		
۱/۱۵۷۱	۰/۸۱۰۵۶	۶۹	۶۹		
۱/۰۹۸۳	۰/۸۷۸۶۶	۱۷۴	۱۷۴		
۱/۰۴۶۳	۰/۹۴۱۶۹	۷۷۶	۷۷۶		

با توجه به جدول ۱ مقدار بهینه تقریبی و دقیق  $r$  برابر با ۱۹ و ضرایب پذیرشی به صورت  $k_1 = 0.65484$  و  $k_2 = 1.3030$  خواهند بود. ثابت پذیرشی  $c$  هر مقداری در فاصله  $[c_2, c_1]$  را می‌تواند اختیار کند که در آن



جدول ۲: تعداد بهینه گروه‌ها برای  $r = 19$ 

اندازه گروه	تعداد بهینه گروه‌ها	ETC بهینه	مینیم ETD	ماکسیم ETD
۱	۸۰	۱۰۲۴/۲۱	۶/۷۳۰۳۹	۸۷/۶۹۰۲
۲	۴۵	۵۹۷/۲۳۲	۶/۷۵۶۶۰	۴۳/۹۶۶۶
۳	۳۴	۴۶۲/۳۷۵	۶/۶۶۶۵۱	۲۹/۳۷۱۰
۴	۲۹	۴۰۱/۱۴۲	۶/۴۵۴۲۸	۲۲/۰۵۹۹
۵	۲۶	۳۶۹/۷۵۷	۶/۳۰۷۸۱	۱۷/۶۶۷۸
۶	۲۴	۳۵۳/۵۵۸	۶/۲۱۹۲۷	۱۴/۷۳۶۶
۷	۲۳	۳۴۶/۳۴۱	۵/۸۹۶۲۸	۱۲/۶۳۷۸
۸	۲۲	۳۴۴/۶۸۹	۵/۸۰۴۶۲	۱۱/۰۶۴۳
۹	۲۱	۳۴۷/۰۰۲	۵/۹۵۹۳۳	۹/۹۵۹۳۳
۱۰	۲۱	۳۵۲/۲۰۲	۵/۳۶۳۴۰	۸/۸۵۶۸۲
۱۱	۲۰	۳۵۹/۶۱۰	۵/۹۰۳۹۵	۸/۰۵۷۰۶
۱۲	۲۰	۳۶۷/۹۷۶	۵/۴۱۱۹۶	۷/۳۸۵۶۴
۱۳	۲۰	۳۷۸/۱۳۲	۴/۹۹۵۶۵	۶/۸۱۷۵۲
۱۴	۲۰	۳۸۹/۶۹۴	۴/۶۳۸۸۲	۶/۳۳۰۵۵
۱۵	۲۰	۴۰۲/۳۸۱	۴/۳۲۹۵۷	۵/۹۰۸۵۱
۱۶	۱۹	۴۱۴/۸۶۷	۵/۵۴۳۳۴	۵/۵۴۳۳۴

$c_1 = k_1\mu_1 = 19/645$  و  $c_2 = k_2\mu_2 = 19/545$ . همان‌طور که قبلاً گفتیم نقطه میانی فاصله یعنی  $c^* = 19/595 = (c_1 + c_2)/2$  یک انتخاب متعادل و مناسب برای  $c$  می‌باشد. بنابراین یک محموله از ژيروسکوپ‌ها پذیرفته می‌شوند اگر و تنها اگر  $\hat{\mu} \geq 19/595$ .

حال فرض کنید بخواهیم تعداد بهینه گروه‌ها را در حالتی که  $m = 1$ ،  $\lambda = 1/25$ ،  $b_1 = 20$  و  $b_2 = 1$  باشند تعیین کنیم. همان‌طور که گفتیم ۱۹ شکست باید مشاهده شود، پس  $g$  یعنی تعداد گروه‌ها حداقل باید ۱۹ باشد. طبق جدول ۲ اگر  $s = 1$  باشد آن‌گاه تعداد بهینه گروه‌ها و  $ETC$  به ترتیب  $g = 80$  و  $Q_{r,s}[g] = 1024/21$  و ماکسیم  $ETD$  نیز به ترتیب  $6/73039$  و  $87/6902$  خواهند بود و این در حالی است که اگر آزمایش را به صورت کامل با  $r = 19$  و در نتیجه  $g = 19$  واحد اجرا کنیم،  $ETD$  و  $ETC$  به ترتیب  $88/6935$  و  $1792/87$  خواهند بود که هر دو مقدار نسبت به حالت بهینه افزایش یافته‌اند.

به‌طور مشابه برای  $s = 5$  مقدار  $g$  مینیمم‌کننده هزینه برآورد شده مورد انتظار آزمون برابر با ۸۰، مقدار بهینه  $ETC$  به صورت  $Q_{r,s}[g] = 369/757$  و ماکسیم  $ETD$  به ترتیب  $6/30781$  و  $17/6678$  خواهند بود اما در حالت  $g = r = 19$  یعنی آزمایش به صورت کامل، طول مورد انتظار آزمون و  $ETC$  به ترتیب  $17/7387$  و  $449/774$  می‌شوند که مقادیر بزرگتری نسبت به حالت بهینه هستند. پس مشاهده نمودیم که با استفاده از طرح بهینه ارائه شده می‌توان طول و هزینه آزمایش را کاهش داد.

## ۵ دست‌آوردهای پژوهش

در این مقاله یک طرح نمونه‌گیری پذیرشی بهینه که ترکیبی از گروه‌بندی واحدها، آزمون مرگ ناگهانی در هر گروه و سانسور گروهی فزاینده می‌باشد، برای توزیع طول عمر وایبل با پارامتر مقیاس نامعلوم ارائه گردید و نشان داده شد به‌منظور پذیرش یا رد یک محموله از تولیدات به‌طور تصادفی  $g$  گروه  $s$  واحدی از محموله انتخاب کرده و واحدها را به صورت همزمان تحت طرح سانسور گروهی فزاینده با الگوی حذف R وارد آزمایش می‌کنیم در نتیجه محموله تولیدی برای  $\hat{\mu} \geq c^*$  پذیرش خواهد شد.

در آخر با استفاده از مثالی کاربردی مشخص شد طرح نمونه‌گیری پذیرشی بهینه ارائه شده می‌تواند زمان و هزینه

آزمایش را به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش دهد.

## مراجع

- [1] Balakrishnan, N. and Cramer, E. (2014), *The Art of Progressive Censoring: Applications to Reliability and Quality*, New York, Springer.
- [2] Fernandez, A.J., Perez-Gonzalez, C.J., Aslam, A. and Jun, C. (2010), *Design of progressively censored group sampling plans for Weibull distributions: An optimization problem*, European Journal of Operational Research. 211, 525–532.
- [3] Perez-Gonzalez, C.J. and Fernandez, A.J. (2009), *Accuracy of approximate progressively censored reliability sampling plans for exponential models*, Statistical Papers. 50, 161–170.



دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن  
۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۶



## توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته و کاربرد آن در قابلیت اطمینان

شفیع زاده، آ ۱

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه اصفهان

### چکیده

ویژگی‌های توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته مورد بحث واقع شده (این مدل قادر به الگو برداری از اشکال متفاوت سالخورده‌گی و معیارهای شکست است) است. در اینجا ارتباط بین پارامتر شکل، تابع چگالی احتمال، تابع توزیع تجمعی، تابع قابلیت، تابع خطر... ارائه می‌شود. روش برآورد ماکزیمم درستنمایی (MLE) برای برآورد پارامترهای مدل و به دست آوردن ماتریس اطلاع مشاهده پیشنهاد می‌شود.

**کلمات کلیدی:** توابع قابلیت اطمینان، برآورد ماکزیمم درستنمایی، آنتروپی، انعطاف پذیری

## ۱ پیش‌گفتار

توزیع وایبل معکوس یک توزیع طول عمر احتمال است که در مباحث قابلیت اطمینان کاربرد فراوان دارد. توزیع وایبل معکوس چندین ویژگی مطلوب دارد. در این تحقیق یک کلاس جدید از توزیع‌ها براساس اصلاح توزیع وایبل معکوس پیشنهاد می‌شود. این کلاس دارای انعطاف پذیری بیشتری در تحلیل مدل نرخ شکست است. [۱] انعطاف پذیری توزیع وایبل معکوس و خواص نظری آن را مطالعه کردند. [۲] توزیع وایبل معکوس تعمیم یافته را پیشنهاد کردند و چندین ویژگی از این مدل را مطرح کردند. [۳] توزیع تبدیل یافته وایبل را با استفاده از تابع توزیع تجمعی وایبل پیشنهاد کردند. [۴] توزیع وایبل معکوس اصلاح شده را پیشنهاد کردند و یک توصیف کامل از ویژگی‌های آن به همراه رفتار قابلیت اعتماد آن ارائه دادند. اخیراً [۵] توزیع وایبل تبدیل یافته اصلاح شده را معرفی کردند که شکست مولفه‌های مکانیکی در معرض تنزل معرفی شده است.

<sup>۱</sup>azi\_shafizadeh@yahoo.com

## ۲ توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته

تابع توزیع تجمعی توزیع وایبل معکوس با  $F_{TIW}(t)$  مشخص شده که به صورت زیر است:

$$F_{TIW}(t) = \exp\left(-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right)$$

توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته با معرفی یک پارامتر جدید به نام  $\lambda$  که انعطاف پذیری بیشتری در توزیع جدید ارائه می‌دهد پیشنهاد می‌شود.

**تعریف ۱.** متغیر تصادفی  $T$  دارای توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته (TIWD) با پارامترهای  $\beta, \eta > 0$  و  $-1 \leq \lambda \leq 1$  می‌باشد هرگاه توابع چگالی و توزیع آن به صورت زیر باشند:

$$f_{TIW}(t) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right)\left(\frac{1}{t}\right)^{\beta+1} \exp\left(-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right) \times \left(1 + \lambda - 2\lambda \exp\left(-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right)\right), t > 0 \quad (1)$$

$$F_{TIW} = (1 + \lambda) \exp\left(-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right) - \lambda \exp\left(-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right)^2, t \geq 0$$

که  $\beta$  و  $\eta$  به ترتیب پارامترهای شکل و مقیاس توزیع را نشان می‌دهند. پارامتر  $\lambda$  یک نوع پارامتر تبدیل یافته است که انعطاف‌پذیری بیشتری را در مدل فراهم می‌کند. توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته حالت کلی بعضی از توزیع‌های شناخته شده است، برای مثال وقتی  $\lambda = 0$  توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته همان توزیع وایبل معکوس (IW) است. وقتی  $\beta = 1$  و  $\lambda = 0$  باشد توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته به صورت نمایی معکوس تبدیل یافته (TIE) خواهد بود. وقتی  $\beta = 2$  توزیع رایلی معکوس تبدیل یافته (TIR) یک نوع خاص از توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته است. بنابراین توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته یک مدل بسیار انعطاف‌پذیر است که وقتی پارامترهای آن تغییر می‌کند به توزیع‌های دیگر تبدیل می‌شود.

## ۳ آنالیز قابلیت اطمینان

توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته می‌تواند برای توصیف طول عمر داده‌ها مفید باشد. تابع قابلیت توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته به صورت زیر تعریف شده است:

$$R_{TIW}(t) = 1 - (1 + \lambda) \exp\left(-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right) + \lambda \exp\left(-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right)^2$$

تابع خطر توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته که همچنین به عنوان نرخ شکست آنی شناخته شده به صورت زیر نشان داده شده است:

$$h_{TIW}(t) = \frac{\left(\frac{\beta}{\eta}\right)\left(\frac{1}{t}\right)^{\beta+1} \exp\left(-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right) \left(1 + \lambda - 2\lambda \exp\left(-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right)\right)}{1 - (1 + \lambda) \exp\left(-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right) + \lambda \exp\left(-\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{t}\right)^\beta\right)^2}$$

تابع خطر تجمعی (CHF) توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته بصورت زیر نشان داده شده:

$$H_{TIW}(t) = \int_0^t \frac{(\frac{\beta}{\eta})(\frac{1}{t})^{\beta+1} \exp(-\frac{1}{\eta}(\frac{1}{t})^\beta)(1 + \lambda - 2\lambda \exp(-\frac{1}{\eta}(\frac{1}{t})^\beta))}{1 - (1 + \lambda) \exp(-\frac{1}{\eta}(\frac{1}{t})^\beta) + \lambda \exp(-\frac{1}{\eta}(\frac{1}{t})^\beta)^2} dt.$$

با حل انتگرال بالا داریم:

$$H_{TIW}(t) = -\ln \left\{ 1 - (1 + \lambda) \exp(-\frac{1}{\eta}(\frac{1}{t})^\beta) - \lambda \exp(-\frac{1}{\eta}(\frac{1}{t})^\beta)^2 \right\}$$

تابع خطر معکوس (RHF) توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته به صورت زیر نشان داده شده:

$$r_{TIW}(t) = \frac{(\frac{\beta}{\eta})(\frac{1}{t})^{\beta+1} (1 + \lambda - 2\lambda \exp(-\frac{1}{\eta}(\frac{1}{t})^\beta))}{\left\{ (1 + \lambda) + \lambda \exp(-\frac{1}{\eta}(\frac{1}{t})^\beta) \right\}}.$$

شکل زیر قابلیت و نرخ شکست آنی از توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته برای کمیت‌های منتخب پارامترها را نشان می‌دهد وقتی  $\beta = 0.5$  باشد تابع خطر نزولی است. وقتی  $\beta = 1$  باشد تابع خطر برای  $0.1 \leq t \leq 0.4$  اکیدا نزولی می‌باشد که نشان دهنده شکست‌های اولیه و زودرس می‌باشد. وقتی  $\beta$  در حال صعود است آن گاه نرخ شکست آنی در حال کاهش است از شکل b تابع خطر (HF) توزیع TIR متوجه شویم که برای  $\lambda = 0$  و  $\beta = 1$  تابع خطر آن با توزیع نمایی معکوس منطبق می‌شود که ابتدا اکیدا صعودی ولی بعد نرخ شکست آن پیوسته کاهش می‌یابد بنابراین توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته یک مدل بسیار انعطاف پذیر است که وقتی پارامتر شکلش تغییر می‌کند به توزیع‌های متفاوت نزدیک می‌شود.

## ۴ آنتروپی

آنتروپی یک متغیر تصادفی معیار تغییر عدم قطعیت و احتمال است. مقدار زیاد آنتروپی عدم قطعیت بیشتری را در داده‌ها نشان می‌دهد. آنتروپی رینی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_R(\rho) = \frac{1}{1-\rho} \log \left\{ \int f(t)^\rho dt \right\},$$

و به فرم زیر در می‌آید:

$$I_R(\rho) = \frac{\rho}{1-\rho} \log(\eta) + \frac{1}{1-\rho} \log(1 + \lambda) + \frac{1}{1-\rho} \times \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\rho}{m} (-1)^m \left( \frac{2\lambda}{1+\lambda} \right)^m \beta \left( \frac{\eta}{\rho+m} \right)^{\frac{(\beta+1)(\beta-\rho)}{\beta}-1} \times \Gamma\left( \frac{(\beta+1)(\beta-\rho)}{\beta} + 1 \right) \right\}. \quad (2)$$

## ۵ برآورد ماکزیمم در ستممایی

نمونه‌های تصادفی  $t_1, t_2, \dots, t_n$  شامل  $n$  مشاهده از توزیع TIWD را در نظر بگیرید فرض کنید بردار پارامتر  $\Theta = (\beta, \eta, \lambda)^T$  باشد تابع درست‌سنمایی از رابطه (۱) اینگونه ارائه شده است:

$$L(t_1, t_2, \dots, t_n : \beta, \eta, \lambda) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{\beta}{\eta} \right) \left( \frac{1}{t} \right)^{\beta+1} \exp\left( -\frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{t} \right)^{\beta} \right) \times (1 + \lambda - \lambda \exp\left( -\frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{t} \right)^{\beta} \right)), t > 0. \quad (3)$$

با گرفتن لگاریتم از رابطه (۱) و مشتق گرفتن از آن برحسب  $\eta, \beta$  و  $\lambda$  و مساوی صفر قرار دادن آن‌ها به ترتیب داریم:

$$\ln L(t_1, \dots, t_n : \beta, \eta, \lambda) = n \ln \beta - n \ln \eta + (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \lambda - \lambda \exp\left(-\frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta}\right)\right).$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta} \ln\left(\frac{1}{t}\right) + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{1}{\eta}\right) \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta} \ln\left(\frac{1}{t}\right) \exp\left(-\frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta}\right)}{\left(1 + \lambda - \lambda \exp\left(-\frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta}\right)\right)} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = \frac{n}{\eta} + \frac{1}{\eta^2} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{1}{t}\right)^{\beta} - \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{1}{\eta^2}\right) \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta} \exp\left(-\frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta}\right)}{\left(1 + \lambda - \lambda \exp\left(-\frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta}\right)\right)} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -\lambda \sum_{i=1}^n \frac{\exp\left(-\frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta}\right)}{\left(1 + \lambda - \lambda \exp\left(-\frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta}\right)\right)} = 0. \quad (6)$$

با حل تساوی‌های (۲)، (۳) و (۴)،  $\hat{\lambda}, \hat{\eta}, \hat{\beta}$  به دست می‌آید برای توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته همه مشتق‌های مرتبه‌ی دوم وجود دارد بنابراین ماتریس اطلاعات مشاهدات به صورت زیر است:

$$V_{rs}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \eta} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \eta} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \eta \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \eta \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۵) فاصله اطمینان  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  تقریبی برای  $\eta, \beta$  و  $\lambda$  بصورت زیر مشخص می‌شود:

$$\hat{\beta} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V_{11}} \quad \hat{\eta} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V_{22}} \quad \hat{\lambda} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{V_{33}}$$

## ۶ دست آوردهای پژوهش

این مقاله یک خانواده جدید از توزیع ها به نام توزیع وایبل معکوس تبدیل یافته را استنتاج نموده است. ویژگی های تئوری از توزیع پیشنهاد شده جدید حاصل شده است. این توزیع یک مدل بسیار انعطاف پذیر است که به توزیع های طول عمر متفاوت، زمانی که پارامترهای آن تغییر می کند، تبدیل می یابد. سودمندی مدل جدید در به کارگیری داده های واقعی با استفاده از MLE توضیح داده شده تا کارایی مدل را نشان دهد. این کاربرد نشان می دهد که توزیع پیشنهاد شده بازده بهتر و مناسبتری از توزیع TIE و IW و IE را دارد مدل پیشنهادی توسعه داده شده می تواند برنامه های کاربردی گسترده تری در تجزیه و تحلیل طول عمر جذب کند.

## مراجع

- [1] Khan, M.S., Pasha, G.R., and Pasha, A.H. (2008), *Theoretical analysis of inverse Weibull distribution*, WSEAS Transactions on Mathematics, 7(2), 30–38.
- [2] De Gusmão, F.R.S., Ortega, E.M.M., and Cordeiro, G.M. (2011), *The generalized inverse Weibull distribution*, Statistical Papers, 52, 591–619.
- [3] Aryal, G.R., and Tsokos, C.P. (2011), *Transmuted Weibull distribution: A generalization of the Weibull probability distribution*, European Journal of Pure and Applied Mathematics, 4(2), 89–102.
- [4] Khan, M.S., and King, R. (2013), *Transmuted generalized inverse Weibull distribution*, Journal of Applied Statistical Sciences, 20(3), 15–32.
- [5] Khan, M.S., and King R. (2014), *A new class of transmuted invers weibull distribution for reliability*, Analysis American Journal of Mathematical and Management Science, 33,261-286.



دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن

۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۵



## مدل سازی توأم داده‌های بقا و مشاهدات طولی با توجه به مسأله شرایط آغازین

ملکیان، م. ۱ ریخته‌گران، ر. ۲

۱،۲ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

### چکیده

در این مقاله، در چارچوب رویکرد بیز، به مدل‌سازی توأم داده‌های طولی و بقا می‌پردازیم. برای این منظور فرض می‌شود که مشاهدات طولی و بقا از طریق اثرات تصادفی واحدهای آزمایشی به هم وابسته هستند. همچنین تاثیر مستقیم مشاهدات طولی در زمان بقا نیز لحاظ شده است. به منظور در نظر گرفتن همبستگی پیاپی بین مشاهدات طولی، از مدل آمیخته پویا با در نظر گرفتن متغیر پاسخ تاخیری استفاده می‌شود. در این رابطه به مسأله شرایط آغازین که به دلیل وجود همبستگی بین مشاهدات آغازین و اثرات تصادفی ایجاد می‌شود، توجه شده است. برآورد بیز پارامترها با استفاده از نمونه‌برداری گیبز به دست آمده است. عملکرد مدل بر روی مجموعه داده‌های واقعی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** مدل آمیخته پویا، داده‌های طولی، تحلیل بقا، نمونه‌برداری گیبز، مسأله شرایط آغازین

## ۱ پیش‌گفتار

در بسیاری از مطالعات نظیر مطالعات پزشکی، اطلاعات مربوط به بقا، همراه با داده‌های طولی که مرتباً تحت یک دوره زمانی معین اندازه‌گیری می‌شوند، جمع‌آوری می‌گردد. جهت تحلیل داده‌های بقا و طولی روش‌های متعددی مانند مدل‌های با اثرات آمیخته برای متغیر طولی و مدل مخاطرات متناسب پارامتری و یا نیمه پارامتری برای داده‌های بقا، وجود دارد. با این وجود، در مواردی که متغیر زمان بقا به متغیر طولی وابسته باشد، تحلیل جداگانه، روش مناسبی

<sup>۱</sup> m.malekian@math.iut.ac.ir

<sup>۲</sup> r\_rikhtehgaran@cc.iut.ac.ir



نیست. از مدل‌های مورد بررسی در این رابطه، مدل پارامتر مشترک است که در آن ارتباط بین دو مدل داده‌های طولی و بقا از طریق یک اثر تصادفی مشترک، مشخص می‌شود [۱]. در این مدل، زمان بقا و متغیر طولی به شرط اثرات تصادفی، مستقل از یکدیگر فرض می‌شوند؛ در واقع ارتباط این دو متغیر تنها از طریق اثرات تصادفی مرتبط با واحدهای آزمایشی، قابل بررسی است. در این مقاله تأثیر متغیر طولی را در زمان رخداد پیشامد از طریق مدل توأم آمیخته پویا و بقا بررسی می‌نماییم. به این ترتیب، تأثیر مستقیم متغیر پاسخ بر زمان بقا نیز در نظر گرفته می‌شود. مسأله قابل توجه در برازش این مدل‌ها، مسأله شرایط آغازین است که به دلیل وجود وابستگی میان مشاهدات زمان‌های آغازین و اثرات تصادفی، ایجاد می‌شود و می‌تواند منجر به برآوردهای ناسازگاری از پارامترهای مدل شود [۲]. جهت رفع مسأله شرایط آغازین، معادله مجزایی برای مقدار آغازین متغیر پاسخ با ایجاد وابستگی با سایر مدل‌ها در نظر گرفته می‌شود.

در ادامه، در بخش ۲ مدل پیشنهادی توأم آمیخته پویا و بقا معرفی می‌شود. در بخش ۳ برآورد پارامترها ارائه می‌شود. در بخش ۴ عملکرد مدل پیشنهادی بر داده‌های واقعی بررسی می‌شود.

## ۲ مدل پیشنهادی توأم آمیخته پویا و بقا

فرض کنید  $y_{it}$ ،  $t$ -امین اندازه‌گیری برای  $i$ -امین واحد آزمایشی  $i = 1, \dots, n$  و  $T_i$  و  $t = 1, \dots, T_i$  زمان بقای واحد آزمایشی  $i$ -ام باشد. مدل پیشنهادی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} y_{it} &| b_i, y_{it-1} \stackrel{\text{ind}}{\sim} N(x'_{it}\beta + b_i + \gamma y_{it-1}, \sigma_\epsilon^2), \\ f(T_i | \delta_i) &= [\mu_i T_i^{\mu_i - 1} \exp\{-T_i^{\mu_i}\}]^{\delta_i} [\exp\{-T_i^{\mu_i}\}]^{1-\delta_i}, \\ \log(\mu_i | b_i, y_{iT_i}) &= w'_{iT_i} \alpha + \varphi^* b_i + \gamma^* y_{iT_i}, \\ b_i &\stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma_b^2), \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن بردارهای متغیرهای توضیحی،  $\beta$ ،  $\varphi$ ،  $\gamma$  و  $\gamma^*$  معرف ضرایب رگرسیونی و  $b_i$  اثر تصادفی است. همچنین متغیر  $\delta_i = 1$  اگر واحد آزمایشی  $i$ -ام در دوره مورد مطالعه سانسور نشده باشد و  $\delta_i = 0$  در غیر این صورت. در واقع  $T_i | \delta_i = 1 \sim \text{weibull}(1, \mu_i)$ .

برخی ویژگی‌های مشاهده‌نشده واحدهای آزمایشی بر متغیر پاسخ، در طول زمان و از جمله در زمان آغازین، تأثیر می‌گذارند که باعث وابستگی میان  $y_i$  و اثرات تصادفی  $b_i$  می‌شود و نادیده گرفتن آن باعث ایجاد اریبی در برآورد پارامترها می‌شود [۲]. جهت رفع این مشکل فرض می‌کنیم

$$y_i. \stackrel{\text{ind}}{\sim} N(x'_i. \beta. + \varphi b_i, \sigma_\epsilon^2) \quad (2)$$

که در آن  $x_i.$  شامل متغیرهای توضیحی است. با ترکیب معادلات (۱.۲) و (۲.۲) داریم

$$\begin{aligned} y_i &| b_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} N_{T_i+1}(X_i^* \theta + \lambda b_i, \sigma_\epsilon^2 I_{T_i+1}), \\ \log(\mu_i | b_i, y_{iT_i}) &= w'_{iT_i} \alpha^* + \varphi^* b_i, \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن  $\theta = (\beta., \beta, \gamma)$ ،  $X_i^*$  متناظر با  $\theta$  تعریف می‌شود،  $w'_{iT_i} = (w'_{iT_i}, y_{iT_i})'$ ،  $\lambda = (\varphi, 1)'$  و  $\alpha^* = (\alpha, \gamma^*)'$ .

### ۳ برآورد بیز پارامترها

جهت برآورد پارامترها، در چارچوب رویکرد بیز، توزیع‌های پیشین مزدوج شرطی، در نظر گرفته می‌شوند. برای این منظور  $N(\cdot, \sigma_\epsilon^2)$  و  $N(\cdot, \sigma_\varphi^2)$  به ترتیب برای  $\theta$  و  $\varphi$  و  $IG(\xi_1^*, \xi_2^*)$  و  $IG(\tau_1, \tau_2)$  به ترتیب برای  $\sigma_\epsilon^2$  و  $\sigma_\varphi^2$  در نظر گرفته می‌شوند. سپس به محاسبه توزیع‌های پسین شرطی کامل مورد استفاده در نمونه بردار گیبز به صورت زیر می‌پردازیم

$$\theta | b_i, \varphi, \sigma_\epsilon^2, y_{it} \sim N_q(A^{-1}B, A^{-1}),$$

$$.B = \varsigma^{-1}\mu^* + \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=1}^n X_i^{*'}(y_i - \lambda b_i) \text{ و } A = \varsigma^{-1} + \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=1}^n X_i^{*'} X_i^*$$

$$\sigma_\epsilon^2 | \theta, b_i, \varphi, \sigma_b^2, y_{it} \sim IG(\xi_1^*, \xi_2^*),$$

$$\text{که در آن } \xi_1^* = \xi_1 + \sum_{i=1}^n T_i + n \text{ و نیز } \xi_2^* = \xi_2 + \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^n (y_i - x_i^{*'}\theta - \lambda b_i)'(y_i - x_i^{*'}\theta - \lambda b_i)$$

$$\sigma_b^2 | \theta, b_i, \varphi, \sigma_\epsilon^2, \varphi^*, y_{it}, T_i, \delta_i \sim IG\left(\tau_1 + n, \tau_2 + \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^n b_i^2\right),$$

$$\pi(\alpha^* | b_i, \sigma_b^2, \varphi^*, T_i, \delta_i) \propto \exp\{D\} \prod_{i=1}^n T_i^{\delta_i} e^{\sum_{i=1}^n w_i T_i' \alpha^* + \varphi^* b_i - 1} \pi(\alpha^*),$$

$$\text{که در آن } D = \sum_{i=1}^n \delta_i w_i T_i^{*'} \alpha^* - \sum_{i=1}^n T_i^{\delta_i} e^{w_i T_i^{*'} \alpha^* + \varphi^* b_i}$$

$$b_i | \theta, \alpha^*, \varphi, \sigma_\epsilon^2, \sigma_b^2, \alpha^*, \varphi^*, y_{it}, T_i, \delta_i \sim N(\mu_{b_i}^*, \sigma_{b_i}^{*2}),$$

$$\text{که در آن } \mu_{b_i}^* = \frac{\lambda \sigma_\alpha^2}{\sigma_\epsilon^2} (y_i - X_i^{*'}\theta) \text{ و } \sigma_\epsilon^2 = \lambda^2 \sigma_\alpha^2 + \sigma_\epsilon^2, \sigma_{b_i}^{*2} = \frac{\sigma_\epsilon^2 \sigma_\alpha^2}{\sigma_\epsilon^2 + \lambda^2}$$

$$\varphi | \theta, b_i, \sigma_\epsilon^2, \sigma_b^2, y_{it} \sim N(a_\varphi^{-1} b_\varphi, a_\varphi^{-1}),$$

$$\text{که در آن } b_\varphi = \frac{1}{\sigma_\varphi^2} + \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=1}^n (y_i - x_i' \beta) b_i \text{ و } a_\varphi = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=1}^n b_i^2$$

$$\pi(\varphi^* | b_i, \sigma_b^2, \alpha^*, T_i, \delta_i) \propto \exp\{F\} \prod_{i=1}^n T_i^{\delta_i} e^{\sum_{i=1}^n w_i \varphi^* b_i - 1} \pi(\varphi^*),$$

که  $F = \sum_{i=1}^n \delta_i \varphi^* b_i - \sum_{i=1}^n T_i^{\delta_i} e^{w_i T_i^{*'} \alpha^* + \varphi^* b_i}$  اکنون با شبیه‌سازی از توزیع‌های بالا و سپس میانگین‌گیری از نمونه‌های به‌دست‌آمده، برآورد بیز پارامترها قابل محاسبه است.

### ۴ مثال: برازش مدل توأم آمیخته پویا و بقا به داده‌های ایدز

داده‌ها، برگرفته از پژوهشی در برزیل بر روی بیماری ایدز است [۳]. در این مطالعه، تعداد  $cd4$  موجود در خون به‌عنوان متغیر پاسخ  $y_{it}$  ثبت شده در طی زمان و نیز زمان رخداد بیماری ایدز در دست است. متغیرهای توضیحی شامل گروه دریافت‌کننده دارو  $x_1$ ، جنسیت  $x_2$ ، وضعیت ابتلا به بیماری در ابتدای مطالعه  $x_3$  و وضعیت نسوج سلول‌ها  $x_4$  است. مدل  $M_1$  را به صورت

$$y_{it} = \beta_1' + \gamma y_{it-1} + \beta_2' x_{1i} + \beta_3' x_{2i} + \beta_4' x_{3i} + \beta_5' x_{4i} + \varphi b_i$$

$$\log(\mu_i) = \beta_1 + \beta_2 x_{1i} + \beta_3 x_{2i} + \beta_4 x_{3i} + \beta_5 x_{4i} + \gamma^* y_{it} + b_i$$

$$y_i = \beta_{.1} + \beta_{.2} x_{1i} + \beta_{.3} x_{2i} + \beta_{.4} x_{3i} + \beta_{.5} x_{4i} + \varphi^* b_i, \quad (4)$$

جدول ۱: برآورد بیز ضرایب رگرسیونی مدل

مدل	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$	$\beta_{10}$	$\beta_{11}$	$\beta_{12}$
مدل ۱	-۴/۳۰۷ (۱/۲۶۳)	-۱/۱۰۱ (۰/۴۸۲)	-۰/۲۳۰ (۰/۲۹۸)	-۰/۲۱۹ (۰/۲۸۳)	-۰/۰۵۰ (۰/۲۲۴)	۵/۲۶۷ (۱/۳۶۶)	۵/۲۶۷ (۱/۳۶۶)	۰/۶۴۱ (۱/۶۸۱)	۱/۷۱۴ (۰/۹۸۷)	-۰/۳۵ (۰/۹۳۹)	-۰/۸۱۸ (۱/۰۰۳)	-۰/۴۳ (۰/۰۳۰)	-۰/۰۳۹ (۰/۰۷۴)
مدل ۲	-۴/۶۱۵ (۱/۴۵۱)	-۰/۱۲۹ (۰/۴۶۲)	-۰/۱۸۷ (۰/۲۸۷)	-۰/۲۲۷ (۰/۲۸۷)	-۰/۰۲۳ (۰/۳۱۷)	۵/۲۶۷ (۱/۴۲۹)	۵/۲۶۷ (۱/۴۲۹)	۰/۶۴۱ (۱/۶۰۳)	۱/۷۱۴ (۰/۹۸۰)	-۰/۳۵ (۱/۰۱۵)	-۰/۸۱۸ (۱/۰۰۹)	-۰/۴۳ (۰/۰۳۰)	-
مدل ۳	۳۵/۲۹ (۲۰/۰۸)	۱۴/۴۸ (۱۳/۴۲)	۵/۴ (۹/۷۹۱)	۳/۶۷۴ (۷/۵۸۱)	-۲۳/۰۹ (۱۱/۰۹)	-۲/۱۵۷ (۲۰/۰۸)	-۲/۱۵۷ (۲۰/۰۸)	۰/۴۱۹ (۱۳/۴۲)	-۱/۰۶ (۹/۷۹۱)	-۰/۴۲ (۷/۵۸۱)	-۰/۲۸۷ (۱۱/۰۹)	-	-۲۳/۰۹ (۲۷/۵۳)
مدل ۴	-۲/۸۶۴ (۱/۲۲۲)	۲/۸۶۴E-۲ (۰/۴۷۳)	-۰/۱۰۵ (۰/۲۹۴)	۰/۱۴۵ (۰/۲۸۵)	-۰/۱۸۷ (۰/۳۱۸)	۵/۵۸۵ (۱/۵۳)	۵/۵۸۵ (۱/۵۳)	۰/۵۶۳ (۱/۷۱۳)	۱/۳۷۸ (۱/۰۰۵)	-۰/۲۸۲ (۱/۰۰۰)	-۰/۷۷۷ (۱/۰۷۳)	-۰/۶۳ (۰/۰۴۲)	-۰/۱۵۸ (۰/۰۸۲)

در نظر می‌گیریم. سپس مدل‌های زیر را جهت مقایسه با مدل معرفی شده، در نظر می‌گیریم

مدل  $M_2$  : مدل  $M_1$  با در نظر گرفتن  $\gamma^* = 0$ .

مدل  $M_3$  : مدل  $M_1$  با در نظر گرفتن  $\gamma = 0$  و  $\varphi^* = 0$ .

مدل  $M_4$  : مدل  $M_1$  با در نظر گرفتن  $\varphi^* = 0$ .

به منظور برآورد پارامترها از پیشین‌های ناآگاهی بخش، با واریانس زیاد، استفاده شده است. سپس با تولید ۱۰۰۰۰۰ نمونه در نرم‌افزار اپن باگز [۵] پس از حذف ۱۰۰۰۰ دور ریز، برآورد پارامترها به دست آمده‌اند. خلاصه‌ای از نتایج در جدول ۱ گزارش شده‌اند. جهت مقایسه مدل‌ها از معیار  $DIC$  [۴] استفاده شده است. مقدار این معیار برای مدل‌های ۱ تا ۴ به ترتیب ۴۱۲/۴، ۶۱۰/۷، ۷۱۱/۸ و ۸۴۱/۲ به دست آمده است. با توجه به اینکه  $DIC$  مدل  $M_1$ ، از سایر مدل‌ها کمتر است، عملکرد مناسب مدل پیشنهادی، نشان داده می‌شود.

## مراجع

- [1] Follmann D and Wu M. (1995), *An approximate generalized linear model with random effects for informative missing data.*, Biometrics, 51:151-168.
- [2] Kazemi, I. and Davies, R.B.(2002), *The asymptotic bias of MLEs for dynamic panel data models*, In Stasinopoulos M. and Touloumi G. (eds), *Proceedings of the 17th IWSM*, Chania, Greece, 391-395.
- [3] Pública, C. and Janeiro, R. (2010), *Accuracy of a probabilistic record linkage strategy applied to identify deaths among cases reported to the Brazilian AIDS surveillance database*, *Artigo*, 26(7):1431-1438.
- [4] Lunn, D. and Spiegelhalter, D. and Thomas, A. and Best, N.(2009), *The BUGS project: Evolution, critique and future directions*, *Statistics in Medicine*, 28 (25): 3049-3067.
- [5] Spiegelhalter DJ and Thomas A. and Best NG and Lunn D (2003). *WinBUGS Version 1.4 Users Manual.* MRC Biostatistics. 51:151-168.



دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن

۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۵



## توزیع وایبل معکوس وزنی

زادکرمی، م<sup>۱</sup> معصومی، غ<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشیار گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز  
<sup>۲</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز

### چکیده

در این مقاله توزیع جدید وایبل معکوس وزنی جهت استفاده در تحلیل بقا و داده‌های طول عمر تعریف شده و برخی خواص ریاضی این توزیع مورد مطالعه قرار گرفته است. از روش ماکسیمم درستنمایی برای برآورد پارامترهای این توزیع استفاده شده است. کاربرد این توزیع با استفاده از داده‌های واقعی طول عمر و مقایسه با بعضی از توزیع‌های طول عمر صورت گرفته است.

**کلمات کلیدی:** وایبل معکوس وزنی، آزالینی، برآورد ماکسیمم درستنمایی، آماره‌های ترتیبی، گشتاورها و تابع مولد گشتاور

## ۱ پیش‌گفتار

در سال‌های اخیر روش‌های مختلفی برای ساختن توزیع‌های پیوسته طول عمر به کار رفته است [۱]. روش آزالینی در [۲] یکی از این روش‌ها است که با استفاده از یک تابع چگالی متقارن و یک توزیع پیوسته، یک تابع چگالی چوله را به صورت زیر تعریف می‌کند.

$${}^2 f(x)G(\lambda x) \quad (1)$$

که  $f(x)$  تابع چگالی متقارن حول صفر و  $G(\cdot)$  تابع توزیع پیوسته‌ای است که مشتق اول آن یک تابع متقارن است و پارامتر  $\lambda$  را پارامتر چولگی می‌نامند.

<sup>۱</sup>zadkarami\_m@scu.ac.ir

<sup>۲</sup>G-masoomi@mscstu.scu.ac.ir

نصیرو در [۳] تعمیمی از روش آزالینی به نام نسخه‌ی وزنی تعمیم‌یافته‌ی آزالینی (۱۹۸۵) را برای ساختن توزیع‌های نامتقارن به صورت زیر به کار گرفت.

$$f(x) = kg(x)\bar{G}(\lambda x) \quad (۲)$$

که  $g(x)$  تابع چگالی نامتقارن،  $\bar{G}(x)$   $kg(x)$  (۲۰۱۵). $g(x)$  (۲/۱). $g(x)$  (۲/۱).

تعریف ۱. تابع چگالی و تابع توزیع وایبل معکوس به ترتیب به صورت زیر است.

$$g(x) = \alpha \gamma x^{-(\gamma+1)} e^{-\alpha x^{-\gamma}}$$

$$G(x) = e^{-\alpha x^{-\gamma}}$$

تعریف ۲. تابع بقای توزیع وایبل معکوس به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\bar{G}(x) = 1 - e^{-\alpha x^{-\gamma}}$$

## ۲ توزیع وایبل معکوس وزنی

با قرار دادن تابع چگالی و تابع بقای توزیع وایبل معکوس در معادله‌ی (۲،۱) تابع چگالی وایبل معکوس وزنی به صورت زیر ساخته می‌شود.

$$f(x) = (1 + \lambda \gamma) \alpha \gamma x^{-(\gamma+1)} e^{-\alpha x^{-\gamma}} (1 - e^{-\alpha \lambda^{-\gamma} x^{-\gamma}}) \quad (۳)$$

که  $\alpha$  پارامتر مقیاس،  $\gamma$  و  $\lambda$  پارامترهای شکل هستند. تابع توزیع وایبل معکوس وزنی و تابع مخاطره آن به ترتیب به صورت زیر می‌باشند.

$$F(x) = (1 + \lambda \gamma) e^{-\alpha x^{-\gamma}} \left(1 - \frac{e^{-\alpha \lambda^{-\gamma} x^{-\gamma}}}{1 + \lambda^{-\gamma}}\right)$$

$$h(x) = \frac{(1 + \lambda \gamma) \alpha \gamma x^{-(\gamma+1)} e^{-\alpha x^{-\gamma}} (1 - e^{-\alpha \lambda^{-\gamma} x^{-\gamma}})}{1 - [(1 + \lambda \gamma) e^{-\alpha x^{-\gamma}} (1 - \frac{e^{-\alpha \lambda^{-\gamma} x^{-\gamma}}}{1 + \lambda^{-\gamma}})]}$$

تعریف ۳. گشتاور  $m_r$  و تابع مولد گشتاور توزیع وایبل معکوس وزنی به ترتیب به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\mu'_r = \alpha^{\frac{r}{\gamma}} (1 + \lambda \gamma) \Gamma\left(\frac{-r}{\gamma}\right) [-(1 + \lambda^{-\gamma})^{\frac{r}{\gamma}-1} + 1]$$

$$M_x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \alpha^{\frac{i}{\gamma}} (1 + \lambda \gamma) \Gamma\left(\frac{-i}{\gamma}\right) [-(1 + \lambda^{-\gamma})^{\frac{i}{\gamma}-1} + 1]$$

تعریف ۴.  $k$  امین آماره‌ی ترتیبی تابع چگالی وایبل وزنی به صورت زیر است.

$$g_{k:n} = \binom{n}{k} (1 + \lambda \gamma) \alpha \gamma x^{-(\gamma+1)} e^{-\alpha x^{-\gamma}} (1 - e^{-\alpha \lambda^{-\gamma} x^{-\gamma}}) \left[ (1 + \lambda \gamma) e^{-\alpha x^{-\gamma}} (1 - \frac{e^{-\alpha \lambda^{-\gamma} x^{-\gamma}}}{1 + \lambda^{-\gamma}}) \right]^{k-1}$$

تعریف ۵. تابع ماکسیمم درستنمایی تابع چگالی وایبل معکوس وزنی به صورت زیر است.

$$L(\mathbf{x}; \alpha, \gamma, \lambda) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda^\gamma) \alpha \gamma x_i^{-(\gamma+1)} e^{-\alpha x_i^{-\gamma}} (1 - e^{-\alpha \lambda^{-\gamma} x_i^{-\gamma}})$$

از لگاریتم تابع ماکسیمم درستنمایی نسبت به پارامترها مشتق ضمنی می‌گیریم و مشتق‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{\delta \log L(\mathbf{x}; \alpha, \gamma, \lambda)}{\delta \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma} + \lambda^{-\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\gamma} e^{-\alpha \lambda^{-\gamma} x_i^{-\gamma}}}{(1 - e^{-\alpha \lambda^{-\gamma} x_i^{-\gamma}})} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\delta \log L(\mathbf{x}; \alpha, \gamma, \lambda)}{\delta \lambda} = \frac{n \gamma \lambda^{\gamma-1}}{1 + \lambda^\gamma} + \alpha \gamma \lambda^{-(\gamma+1)} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{-\gamma}}{1 - e^{-\alpha \lambda^{-\gamma} x_i^{-\gamma}}} = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \log L(\mathbf{x}; \alpha, \gamma, \lambda)}{\delta \gamma} &= \frac{-n \lambda^{-\gamma} \log \lambda}{1 + \lambda^{-\gamma}} + \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^n \log x_i \\ &\quad + \alpha (1 + \lambda^{-\gamma}) \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma} \log x_i + \alpha \lambda^{-\gamma} \log \lambda \sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

با حل هم‌زمان معادله‌های (۲،۲)، (۲،۳)، (۲،۴) و (۲،۴) برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها را بدست می‌آوریم. با استفاده از منفی امید ریاضی مشتق‌های دوم ضمنی معادله‌های (۲،۲)، (۲،۳) و (۲،۴) می‌توان ماتریس اطلاع فیشر را بدست آورد. معکوس ماتریس اطلاع فیشر، ماتریس واریانس کواریانس برآوردهای ماکسیمم درستنمایی است.

### ۳ دست‌آوردهای پژوهش

در این مقاله مطالعه‌های تجربی برای نشان دادن تاثیر اضافه کردن پارامتر چولگی  $\lambda$  بر میانگین، واریانس، چولگی و کشیدگی تابع چگالی وایبل معکوس وزنی صورت گرفت. با استفاده از شبیه‌سازی و با کمک روش مونت‌کارلو برای مقادیر مختلف پارامترها، برآورد ماکسیمم درستنمایی را بدست آوردیم و نشان دادیم که برآوردهای حاصل شده دارای اریبی و میانگین مربعات خطای ناچیزی است. همچنین با استفاده از داده‌های واقعی طول عمر در [۵] کاربرد این توزیع جدید را نشان دادیم. در این پژوهش تابع چگالی وایبل معکوس وزنی ساخته شده را با توزیع‌های وایبل وزنی نصیرو (۲۰۱۵) و وایبل سه پارامتری تیموری و گوپتا در [۴] و با استفاده از آماره‌های آکائیک و بکائیک در جدول ۱ مقایسه کردیم. جدول ۱ نشان می‌دهد که براساس آماره‌های آکائیک و بکائیک توزیع جدید وایبل معکوس وزنی برازش بهتری نسبت به دو توزیع دیگر در این جدول دارد.

### مراجع

- [1] Lee, C., Famoye, F., and Alzaatreh, A. Y. (2013), *Methods for generating families of univariate continuous distributions in the recent decades*, Computational Statistics, 5(3), 219-238.

جدول ۱:

مدل	برآورد ماکسیمم درست‌نمایی	AIC	BIC
وایبل وزنی	$\alpha = 1.346, \gamma = 1.81, \lambda = 1.27$	۷۱,۰۲	۷۴,۴۳
وایبل سه پارامتری تیموری و گوپتا (۲۰۱۳)	$\alpha = 2, \beta = 3.5, \mu = -1.2$	۹۲,۹	۹۶,۳۶
وایبل معکوس وزنی	$\alpha = 1.567, \gamma = 1.690, \lambda = 1.041$	۷۰,۰۸	۷۳,۴۸

- [2] Azzalini, A. (1985), *A class of distributions which includes the normal ones*, Scandinavian Journal of Statistics, 12, 171-178.
- [3] Nasiru, S. (2015), *Another weighted Weibull distribution from Azzalini's family*, European Scientific Journal, 11(9), 138-144.
- [4] Teimouri, M. and Gupta, K. A. (2013), *On three-parameter Weibull distribution shape parameter estimation*, Journal of Data Science, 11, 403- 414.
- [5] Bebbington, M., Lai, C. D., Zitikis, R. (2007), *A flexible Weibull extension*, Reliability Engineering System Safety, 92(6), 719-726.



## پیش بینی زمان خرابی بر اساس داده‌های فرسایشی به روش تقریبی

نزاکتی، ا. ۱ رزمخواه، م. ۲

۱،۲ گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

### چکیده

برآورد توزیع زمان خرابی مولفه‌ها و سیستم‌ها، اطلاعات مهمی را در اختیار تولیدکنندگان قرار می‌دهد. اما به دست آوردن داده‌های طول عمر در سیستم‌های با قابلیت بالا، کاری زمان‌بر و پرهزینه است. در این زمینه داده‌های فرسایشی می‌تواند جایگزین مناسبی برای داده‌های طول عمر و مطالعات قابلیت باشد. روش تقریبی یکی از مرسوم‌ترین روش‌ها برای تحلیل داده‌های فرسایشی است. این روش با استفاده از داده‌های فرسایشی، زمان خرابی مولفه‌ها را پیش‌بینی و توزیع آن‌ها را برآورد می‌کند. روش تقریبی علی‌رغم ساده و مرسوم بودن، در پیش‌بینی زمان‌های خرابی نکاتی را نادیده می‌گیرد. در این مقاله به تبیین روش تقریبی می‌پردازیم، نقاط ضعف این روش را بیان کرده و به اصلاح این روش می‌پردازیم.

**کلمات کلیدی:** داده‌های فرسایشی، روش تقریبی، شبه زمان خرابی، توزیع زمان تا خرابی

## ۱ پیش‌گفتار

در بسیاری از سیستم‌های مهندسی، خراب شدن ماشین و تعمیر آن در موقع از کار افتادگی، کارایی سیستم را کاهش می‌دهد و در بعضی مواقع باعث افزایش هزینه‌های تحمیلی می‌شود. بنابراین داشتن قابلیت بالا برای یک سیستم ضروری به نظر می‌رسد. برای محصولات با قابلیت بالا، ارزیابی قابلیت با استفاده از داده‌های طول عمر، اغلب به دلیل فقدان شکست در بازه‌ای مشخص، کاری مشکل و طاقت‌فرسا است. در این مواقع داده‌های فرسایشی حاوی اطلاعات مفیدی هستند و می‌توانند یک جایگزین مناسب برای داده‌های طول عمر باشند. در عمل بسیاری از خرابی‌ها، از یک مکانیسم فرسایشی پیروی می‌کنند. به‌طور مثال میزان ترک یک وسیله در طول زمان رشد می‌کند و

<sup>۱</sup> nezakati-e@stu.um.ac.ir

<sup>۲</sup> razmkhahm@um.ac.ir



زمانی که میزان ترک آن به سطح خاصی برسد، آن وسیله کارایی خود را از دست داده و به عنوان یک وسیله خراب در نظر گرفته می‌شود. همچنین می‌توان به میزان روشنایی لامپ‌های فلورسنت اشاره کرد که به مرور میزان روشنایی آن‌ها کم‌تر می‌شود. برای انجام یک آزمایش فرسایشی، باید سطحی از فرسایش به عنوان سطح بحرانی، از پیش تعیین شود و خرابی زمانی تعریف شود که مقدار فرسایش از این سطح بحرانی تجاوز کند. در تحلیل داده‌های فرسایشی و برآورد پارامترهای نامعلوم آن، می‌توان از مدل‌های خطی یا غیر خطی استفاده نمود. علاوه بر این می‌توان توزیع زمان خرابی سیستم را به وسیله داده‌های فرسایش به دست آورد. برای این هدف روش‌های مختلفی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به روش تقریبی و عددی اشاره نمود [۴]. علاوه بر این از رویکرد بیزی نیز در تحلیل مدل‌های فرسایشی استفاده می‌شود ([۱] و [۵]). روش تقریبی ساده‌ترین روش برای به دست آوردن توزیع زمان خرابی است و به راحتی می‌توان آن را در نرم‌افزارهای آماری پیاده‌سازی نمود. این روش با وجود تمام جذابیتی که دارد، بعضی نکات را برای پیش‌بینی زمان‌های خرابی نادیده می‌گیرد. در این مقاله سعی بر این است که به‌طور واضح به بیان نقاط ضعف این روش پرداخته‌شود و پیش‌بینی دقیق‌تری برای زمان‌های خراب ارائه شود.

## ۲ مدل فرسایش و پیش‌بینی زمان خرابی

فرض کنید  $n$  مولفه مورد آزمایش، در زمان‌های از پیش تعیین شده  $t_1, \dots, t_s$  مورد بازرسی قرار گیرند و عملکرد فرسایشی آن‌ها ثبت شود. نیازی نیست که زمان‌های بازرسی برای تمام مولفه‌ها یکسان باشد. فرض کنید  $t_{ij}$  زمان بازرسی  $j$ ام برای مولفه  $i$ ام و  $y_{ij}$  عملکرد فرسایشی مشاهده شده آن باشد. زمانی که مقدار فرسایش مولفه به سطح بحرانی  $D_f$  برسد، آن مولفه کارایی خود را از دست می‌دهد و به عنوان یک مولفه خراب در نظر گرفته می‌شود. در پایان آزمایش، جفت‌های  $(t_{i1}, y_{i1}), \dots, (t_{i2}, y_{i2}), \dots, (t_{im_i}, y_{im_i})$ ،  $i = 1, \dots, n$  مشاهده شده‌اند. یک مدل کلی برای عملکرد فرسایشی مولفه  $i$ ام در بازدید  $j$ ام، به صورت زیر می‌باشد [۳]

$$y_{ij} = D(t_{ij}; \underline{\beta}_i) + \epsilon_{ij} \quad ; j = 1, \dots, m_i \quad , i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

که در آن  $D(t_{ij}; \underline{\beta}_i)$  مدل فرسایشی برای مولفه  $i$ ام در زمان  $t_{ij}$  و  $\underline{\beta}_i = (\beta_{i1}, \dots, \beta_{ik})^t$  بردار پارامترهای مدل برای مولفه  $i$ ام می‌باشد که می‌تواند برداری ثابت اما مجهول و یا متغیری تصادفی باشد.  $\epsilon_{ij}$  نیز خطای تصادفی مربوط به اندازه‌گیری فرسایش مولفه  $i$ ام در بازرسی  $j$ ام است و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ثابت  $\sigma^2$  می‌باشد.

در ادامه، به اختصار به تبیین روش تقریبی می‌پردازیم. برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توان به [۳] مراجعه نمود. روش تقریبی در تحلیل مدل (۱) دارای دو مرحله است. در مرحله اول برای هر مولفه، به پیش‌بینی زمانی می‌پردازیم که فرسایش آن به سطح بحرانی  $D_f$  می‌رسد. این مقدار پیش‌بینی شده، شبه زمان خرابی نامیده می‌شود. در مرحله دوم،  $n$  شبه زمان خرابی به عنوان مقادیر مشاهده شده یک نمونه تصادفی کامل در نظر گرفته می‌شود، مدل مناسب را به داده‌ها برازش داده و توزیع زمان تا خرابی به دست می‌آید. به بیان دقیق‌تر می‌توان گفت:

- در مرحله اول برای مولفه  $i$ ام، با استفاده از مدل (۱) و داده‌های  $(t_{i1}, y_{i1}), \dots, (t_{im_i}, y_{im_i}), \dots$ ، با استفاده از روش کمترین مربعات خطا، پارامترهای  $\underline{\beta}_i = (\beta_{i1}, \dots, \beta_{ik})^t$  برآورد می‌شوند. به عنوان مثال اگر مدل به صورت خطی

$$D(t; \underline{\beta}) = \beta_1 + \beta_2 t \quad (2)$$

باشد، برآورد کمترین مربعات  $\underline{\beta}_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2})^t$  عبارت است از

$$\hat{\beta}_{i1} = \bar{y}_i - \hat{\beta}_{i2} \bar{t}_i, \quad \hat{\beta}_{i2} = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} (t_{ij} - \bar{t}_i) y_{ij}}{\sum_{j=1}^{m_i} (t_{ij} - \bar{t}_i)^2}; \quad i = 1, \dots, n,$$

که در آن  $\bar{y}_i$  و  $\bar{t}_i$  به ترتیب متوسط  $t_{i1}, \dots, t_{im_i}$  و  $y_{i1}, \dots, y_{im_i}$  می‌باشد. پس از آن با حل معادله  $D(t_i, \underline{\beta}_i) = D_f$ ، شبه زمان خرابی  $\hat{t}_i$  به دست می‌آید. به عنوان مثال در مدل (۱)، مقدار  $\hat{t}_i$  عبارت است از:

$$\hat{t}_i = \frac{D_f - \hat{\beta}_{i1}}{\hat{\beta}_{i2}}; \quad i = 1, \dots, n.$$

- در مرحله دوم با استفاده از روش‌های نیکویی برازش، توزیع زمان خرابی برای داده‌های  $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n$  به دست می‌آید.

### ۳ شبه زمان خرابی اصلاح شده

همان‌طور که بیان شد شبه زمان‌های خرابی از حل معادله  $D(t_i; \underline{\beta}_i) = D_f$  به دست می‌آیند. اما در عمل ممکن است این زمان‌های به دست آمده غیر منطقی باشند. به عنوان مثال فرض کنید مقدار فرسایش مولفه  $i$ ام در بازدید  $j$ ام مقداری کمتر از  $D_f$  ثبت شده باشد اما در بازدید  $j+1$ ام این مقدار بیش‌تر از  $D_f$  ثبت شود. بنابراین استنباط می‌شود که مولفه  $i$ ام در زمانی تصادفی بین  $[t_{ij}, t_{i(j+1)}]$  خراب شده است. اما پیش‌بینی  $\hat{t}_i$  که به روش تقریبی به دست می‌آید این نکته را نادیده می‌گیرد و ممکن است  $\hat{t}_i$  به دست آمده قبل از زمان  $t_{ij}$  یا بعد از زمان  $t_{i(j+1)}$  باشد. با توجه به این نکته برای مولفه‌هایی که تا قبل از توقف آزمایش (زمان  $t_s$ ) خراب شده‌اند، می‌توان زمان پیش‌بینی اصلاح شده را به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\tilde{t}_i = \begin{cases} t_{ij}, & \hat{t}_i \leq t_{ij} \\ \hat{t}_i, & t_{ij} < \hat{t}_i < t_{i(j+1)}, \quad i = 1, \dots, n. \\ t_{i(j+1)}, & t_{i(j+1)} \leq \hat{t}_i \end{cases} \quad (۳)$$

توجه به این نکته ضروری است که پیش‌بینی  $\tilde{t}_i$  معرفی شده در (۲)،  $\hat{t}_i$  را تحت تسلط قرار می‌دهد و بنابراین برای برازش مدل خرابی می‌تواند مناسب‌تر باشد.

### ۴ مثال کاربردی

داده‌های رشد ترک، اولین بار توسط هوداک<sup>۱</sup> و همکاران [۲] جمع‌آوری شد و توسط لو<sup>۲</sup> و میکرا<sup>۳</sup> [۳] مورد تحلیل قرار گرفت. در این مقاله با استفاده از این مجموعه داده‌ها تفاوت میان  $\hat{t}_i$  و  $\tilde{t}_i$  نشان داده می‌شود و توزیع مناسب به این گونه داده‌ها برازش می‌شود. شکل ۱ مقادیر رشد ترک ۲۱ مولفه را بر حسب اینچ در زمان‌های بازدید ۰، ۰/۰۱، ۰/۰۲، ...، ۰/۱۲، نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در زمان  $t_s = ۰/۱۲$  آزمایش متوقف می‌شود. سطح بحرانی نیز ۱/۶ اینچ در نظر گرفته شده است. با توجه به شکل ۱ تنها ۱۲ مولفه تا زمان ۰/۱۲ خراب شده‌اند. همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، با توجه به رشد نمایی مسیرهای فرسایشی می‌توان به داده‌های ترک مدل

<sup>۱</sup>Hudak

<sup>۲</sup>Lu

<sup>۳</sup>Meeker

شکل ۱: مقادیر رشد ترک حاصل از فرسودگی

نمایی  $D(t; \beta) = \exp\{\beta_1 + \beta_2 t\}$  را برازش داد. پس از برازش مدل به روش کمترین مربعات خطا و حل معادله  $\hat{t}_i = \frac{\log(D_f) - \hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2}$  برای هر یک از مولفه‌ها شبه زمان‌های خرابی  $\hat{t}_i$ ،  $i = 1, \dots, 21$ ، به دست می‌آید. در جدول زیر مقادیر  $\hat{t}_i$ ،  $\tilde{t}_i$  و زمان بازدید قبل و بعد از خرابی ارائه شده است. در این جدول علامت -- به این معنی است که تا زمان ۰/۱۲ از شروع آزمایش، فرسایش مولفه مورد نظر به سطح بحرانی ۱/۶ نرسیده و در نتیجه داده سانسور شده است.

جدول ۱: شبه زمان‌های خرابی و شبه زمان‌های خرابی اصلاح شده

مولفه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$t_{ij}$	۰/۰۸	۰/۰۹	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱
$t_{i(j+1)}$	۰/۰۹	۰/۱	۰/۱۱	۰/۱۱	۰/۱۱	۰/۱۱	۰/۱۱
$\hat{t}_i$	۰/۰۹۳	۰/۱۰۶۴	۰/۱۰۴۵	۰/۱۰۷۷	۰/۱۰۸۵	۰/۱۱۱۹	۰/۱۱۲۷
$\tilde{t}_i$	۰/۰۹	۰/۱	۰/۱۰۴۵	۰/۱۰۷۷	۰/۱۰۸۵	۰/۱۱	۰/۱۱
مولفه	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
$t_{ij}$	۰/۱	۰/۱۱	۰/۱۱	۰/۱۱	۰/۱۱	۰/۱۲	۰/۱۲
$t_{i(j+1)}$	۰/۱۱	۰/۱۲	۰/۱۲	۰/۱۲	۰/۱۲	--	--
$\hat{t}_i$	۰/۱۱۶۰	۰/۱۱۸۴	۰/۱۲۳۱	۰/۱۲۷۵	۰/۱۳۱۲	۰/۱۴۵۰	۰/۱۵۰۹
$\tilde{t}_i$	۰/۱۱	۰/۱۱۸۴	۰/۱۲	۰/۱۲	۰/۱۲	۰/۱۴۵۰	۰/۱۵۰۹
مولفه	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱
$t_{ij}$	۰/۱۲	۰/۱۲	۰/۱۲	۰/۱۲	۰/۱۲	۰/۱۲	۰/۱۲
$t_{i(j+1)}$	--	--	--	--	--	--	--
$\hat{t}_i$	۰/۱۴۴۲	۰/۱۶۴۲	۰/۱۷۰۲	۰/۱۷۸۴	۰/۱۹۲۹	۰/۱۹۷۷	۰/۲۰۷۸
$\tilde{t}_i$	۰/۱۴۴۲	۰/۱۶۴۲	۰/۱۷۰۲	۰/۱۷۸۴	۰/۱۹۲۹	۰/۱۹۷۷	۰/۲۰۷۸

همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، به عنوان مثال مولفه اول بین بازرسی در زمان‌های ۰/۰۸ و ۰/۰۹ خراب شده‌است، اما  $\hat{t}_i$  به دست آمده برابر ۰/۰۹۳ می‌باشد که خارج از بازه [۰/۰۸, ۰/۰۹] است. بنابراین منطقی است که زمان  $\bar{t}_i$  به عنوان زمان خرابی آن در نظر گرفته شود. با استفاده از مقادیر  $\hat{t}_i$  و  $\bar{t}_i$  داده شده در جدول ۱ توزیع‌های مختلف آماری به داده‌ها برازش داده شده و مقادیر معیار آکائیک (AIC) در جدول ۲ ارائه شده‌است. با توجه به مقادیر آکائیک در جدول ۲ مشاهده می‌شود که مناسب‌ترین مدل برای توزیع زمان تا خرابی حاصل

جدول ۲: معیار آکائیک مربوط به توزیع‌های مختلف برازش شده

توزیع	$\hat{t}$	$\bar{t}$
لگ‌نرمال	-۸۱/۸۴۷۸۲	-۸۰/۵۶۷۱۴
گاما	-۸۱/۱۲۷۳۷	-۷۹/۷۷۵۷۹
نرمال	-۷۹/۰۱۵۴۳	-۷۷/۴۸۱۰۳
وایبل	-۷۷/۹۸۳۳۹	-۷۶/۶۵۹۹۱

از ترک، توزیع لگ‌نرمال می‌باشد. در داده‌های ترک، با توجه به اینکه تعداد کمی از مولفه‌ها تا قبل از زمان ۰/۱۲ خراب شده‌اند، بنابراین مقادیر  $\hat{t}_i$  و  $\bar{t}_i$  به هم نزدیک‌اند و همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود توزیع زمان تا خرابی در هر دو حالت یکسان برازش شد. اما گاهی اوقات توزیع‌های برازش شده متفاوت هستند و یا پارامترهای برآورده شده توزیع تفاوت فاحشی با هم دارند. به هر حال نباید این نکته را نادیده گرفت که مولفه در چه بازه‌ای خراب شده‌است.

## ۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به تبیین روش تقریبی در تحلیل داده‌های فرسایشی و پیش‌بینی زمان‌های خرابی پرداختیم. همچنین نقاط ضعف این روش را بیان کرده و یک پیش‌بینی اصلاح شده ارائه نمودیم.

## مراجع

- [1] Hamada, M. (2005), *Using degradation data to asses reliability*, Qual. Eng. 17, 615–620.
- [2] Hudak, S.J., Saxena, A., Bucci, R.J. and Malcolm, R.C. (1978), *Development of standard methods of testing and analyzing fatigue crack growth rate data*, Tech. Rep. AFML-TR-78-40, Westinghouse R& D Center, Westing-House Electric Corporation, Pittsburg, PA.
- [3] Lu, C.J. and Meeker, W.Q. (1993), *Using degradation measurements to estimate a time-to-failure distribution*, Tech. 35, 161–174.
- [4] Meeker, W. and Escobar, L.A. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, Wiley, New York.
- [5] Robinson, M.E. and Crowder, J.M. (2000), *Bayesian methods for a growth-curve degradation model with repeated measures*, Lifetime Data Anal. 4, 357–374.



## توزیع نیمه لجستیک گسسته

اصغرزاده، ا. ۱. زلیکانی، م. ۲.

۱، ۲ گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران

### چکیده

در این مقاله با گسسته سازی توزیع نیمه لجستیک، توزیع جدیدی بنام نیمه لجستیک گسسته معرفی و خواص آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برآورد پارامتر این مدل به روش درست‌نمایی ماکسیمم بحث می‌شود. کاربرد مدل پیشنهادی در تحلیل داده‌های واقعی در قالب یک مثال عددی مورد بحث قرار خواهد گرفت.

**کلمات کلیدی:** گسسته سازی، توزیع نیمه لجستیک، برآورد، تابع نرخ خطر، لگ-مقعر

## ۱ پیش‌گفتار

در مسائل واقعی داشتن یک نمونه از توزیع پیوسته سخت و دشوار است. در اغلب موارد، مقادیر مشاهده شده از توزیع پیوسته ممکن است گسسته باشند، زیرا مقادیر واقعی ممکن است به تقریب بیان شده باشند. بنابراین در این حالت، مشاهداتی که از یک توزیع پیوسته به دست می‌آیند در واقع مقادیر مشاهده شده نوع گسسته شده‌ی آن توزیع می‌باشند.

گسسته سازی توزیع‌های پیوسته به روش‌های مختلف می‌تواند انجام شود. اگر  $X$  متغیر تصادفی پیوسته دارای تابع بقای  $S_X(x) = P(X \geq x)$  باشد در این صورت مهمترین روش برای گسسته سازی متغیر تصادفی پیوسته  $X$  این است که توزیع  $Y = [X]$  که در آن  $[X]$  جزء صحیح  $X$  می‌باشد را در نظر بگیریم. برای متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی  $X$  با تابع بقای  $S_X(x)$ ، تابع جرم احتمال  $Y = [X]$  به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= P(y \leq X < y + 1) = P(X \geq y) - P(X \geq y + 1) \\ &= S_X(y) - S_X(y + 1), \quad y = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

<sup>۱</sup>elhammosayebi2@ut.ac.ir

<sup>۲</sup>Shemehsavar@khayam.ut.ac.ir

## ۲ توزیع نیمه لجستیک

تابع چگالی و تابع بقای توزیع نیمه لجستیک به صورت زیر است

$$f_X(x) = \frac{2e^{-\frac{x}{\sigma}}}{\sigma(1+e^{-\frac{x}{\sigma}})}, \quad S_X(x) = \frac{2e^{-\frac{x}{\sigma}}}{1+e^{-\frac{x}{\sigma}}}, \quad y \geq 0, \quad \sigma > 0 \quad (1)$$

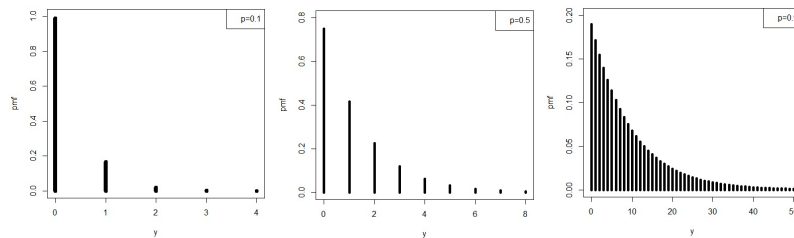
که در آنها  $\sigma$  پارامتر مقیاس است. اگر  $X$  دارای توزیع نیمه لجستیک با تابع چگالی و تابع بقای داده شده در (۱,۲) باشد، آنگاه متغیر تصادفی  $Y = [X]$  دارای توزیع نیمه لجستیک گسسته<sup>۱</sup> با تابع جرم احتمال زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= S_X(y) - S_X(y+1) = \frac{2p^y}{1+p^y} - \frac{2p^{y+1}}{1+p^{y+1}} \\ &= \frac{2p^y(1-p)}{(1+p^y)(1+p^{y+1})}, \quad y = 0, 1, 2, \dots; \quad 0 < p < 1 \quad p = e^{-\frac{1}{\sigma}}, \end{aligned}$$

که آن را با  $Y \sim dhlog(p)$  نمایش می‌دهیم.

### ۱.۲ شکل تابع جرم احتمال

نمودار تابع جرم احتمال توزیع نیمه لجستیک گسسته به ازای مقادیر مختلف  $p$  در شکل ۱ رسم شده است.



شکل ۱: تابع جرم احتمال  $dhlog(p)$

### ۲.۲ نسبت احتمالات متوالی

$$\frac{P(Y = y+1)}{P(Y = y)} = \frac{p(1+p^y)}{1+p^{y+2}}, \quad y = 0, 1, 2, \dots \quad 0 < p < 1$$

واضح است زمانی که  $y \rightarrow \infty$  نسبت  $\frac{P(Y=y+1)}{P(Y=y)}$  (احتمالات متوالی) به  $p$  میل می‌کند. بنابراین توزیع دارای دم بلند است که به پارامتر  $p$  وابسته است. یعنی با افزایش  $p$  دم توزیع در سمت راست درازتر می‌شود. همچنین چون نسبت احتمالات متوالی فوق نسبت به  $y$  نزولی است، لذا داریم:

$$P(Y = y)^2 > P(Y = y+1)P(Y = y-1), \quad y = 0, 1, 2, \dots \quad 0 < p < 1$$

<sup>۱</sup>Discrete half logistic

در نتیجه، توزیع فوق لگ-مقعر است. با توجه به لگ-مقعر بودن، توزیع نیمه لجستیک گسسته i. دارای تابع نرخ خطر صعودی است. ii. قویا تک مدی است. iii. تمام گشتاورهای آن موجود است. iv. توزیع بریده شده آن لگ-مقعر است. v. پیچش آن با توزیع‌های گسسته دیگر اغلب تک مدی و لگ-مقعر است (کلیسون و گریب، ۱۹۷۱).

### ۳.۲ تابع بقا

تابع بقای  $Y \sim dhlog(p)$  عبارت است از

$$\begin{aligned} S(y) &= P(Y \geq y) = \sum_{Y=y}^{\infty} \left[ \frac{2p^y}{1+p^y} - \frac{2p^{y+1}}{1+p^{y+1}} \right] \\ &= \frac{2p^y}{1+p^y}, \quad y = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

### ۴.۲ تابع نرخ خطر

تابع نرخ خطر توزیع  $dhlog(p)$  به صورت زیر است

$$r(y) = \frac{P(Y=y)}{S(y)} = \frac{1-p}{1+p^{y+1}},$$

که نسبت به  $y$  صعودی است.

### ۵.۲ گشتاورها

قضیه ۱. اگر  $Y \sim dhlog(p)$ ، آنگاه می‌توان نشان داد

$$E(Y) = 2 \log 2 - 0.5, \quad Var(Y) = \pi^2/3 - (2 \log 2)^2 + 0.0833.$$

برهان. برای متغیر تصادفی  $X$  با توزیع نیمه لجستیک پیوسته داریم

$$E(X) = 2 \log 2, \quad Var(X) = \pi^2/3 - (2 \log 2)^2.$$

اکنون چون  $X = Y + U$  که در آن  $Y = [X] \sim dhlog(p)$  و  $U = X - [X] \sim U(0, 1)$  داریم

$$E(Y) = E(X) - E(U) = 2 \log 2 - 0.5,$$

$$Var(Y) = Var(X) + Var(U) = \pi^2/3 - (2 \log 2)^2.$$

□

### ۳ برآورد درستنمایی ماکسیمم

اگر  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  یک نمونه تصادفی از  $dhlog(p)$  باشد، آنگاه لگاریتم تابع درستنمایی نمونه به صورت زیر به دست می‌آید

$$\log L = \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) \log p + n \log(1-p) - \sum_{i=1}^n \log(1+p^{y_i}) - \sum_{i=1}^n \log(1+p^{y_i+1}).$$

مشتق تابع لگاریتم درستنمایی نسبت به پارامتر توزیع به صورت زیر می‌باشد

$$\frac{\partial \log L}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{p} - \frac{n}{1-p} - \sum_{i=1}^n \frac{y_i p^{y_i-1}}{1+p^{y_i}} - \sum_{i=1}^n \frac{(y_i+1)p^{y_i}}{1+p^{y_i+1}}.$$

بنابراین برآورد درستنمایی ماکسیمم  $p$  از حل معادله  $\frac{\partial \log L}{\partial p} = 0$  محاسبه می‌شود.

### ۴ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش کاربرد توزیع پیشنهادی نیمه لجستیک گسسته در تحلیل داده‌های واقعی مورد بحث قرار می‌گیرد. داده‌های زیر تعداد نظامیان کشته شده توسط لگد اسب در ۱۴ لشکر را در هر سال در طول سال‌های ۱۸۷۵ تا ۱۸۹۴ نشان می‌دهد (پریس و همکاران، ۱۹۸۸).

$geometric(p)$ $\frac{(o_i - \hat{e}_i)^2}{\hat{e}_i}$	$poisson(\lambda)$ $\frac{(o_i - \hat{e}_i)^2}{\hat{e}_i}$	$dhlog(p)$ $\frac{(o_i - \hat{e}_i)^2}{\hat{e}_i}$	$o_i$	$x$
۲/۶۰۲	۰/۱۷۷	۰/۳۸۸	۱۴۴	۰
۷/۹۲۲	۰/۴۱۲	۰/۸۰۱	۹۱	۱
۰/۵۹۴	۰/۱۲۵	۰/۰۲۴	۳۲	۲
۰/۰۲۲	۱/۱۷۱	۰/۱۰۱	۱۱	۳
۱/۵۸۰	۰/۲۶۷	۰/۳۵۷	۲	۴
$\hat{p} = ۰/۴۱۱۸$	$\hat{\lambda} = ۰/۷$	$\hat{p} = ۰/۲۹۷۳$		
$\chi^2 = ۰/۰۰۵۲$	$\chi^2 = ۲/۱۵۲$	$\chi^2 = ۱/۶۷۱$		
$P = ۰/۶۳۸۱$	$P = ۰/۵۴۱۵$	$P = ۰/۶۴۳۴$		

از جدول آزمون کای دو فوق با توجه به مقادیر p-value نتیجه می‌شود توزیع هندسی به این داده‌ها برازش نمی‌شود. توزیع نیمه لجستیک گسسته در مقایسه با توزیع پواسون برازش بهتری را برای مجموعه داده‌های فوق ارائه می‌دهد.

### مراجع

- [1] Chakraborty, S. and Chakravarty, D. (2015), *A New Discrete Probability Distribution with Integer Support on  $(-\infty, \infty)$* , Communications in Statistics Theory and Methods (to appear).



- [2] Kelison, J. and Gerber, H. (1971), *Some results for discrete unimodality*, Journal of American statistical association. 63, 223–229.
- [3] Preece, D.A., Ross, G.J.S. and Kirby, S.P.J. (1988), *Bortkewitsch's horse-kicks and the generalized linear model*, The Statistician. 37, 313–318.



دومین سمینار تخصصی  
نظریه قابلیت اعتماد و کاربردها آن  
۲۹ و ۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۵



## مقایسه چند توزیع بیرنجام-ساندرز

طوسیان، و<sup>۱</sup> عبدالله نژاد، ک<sup>۲</sup>

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گلستان

### چکیده

در این مقاله یک خانواده از توزیع‌های طول عمر به نام توزیع بیرنجام-ساندرز مورد مطالعه قرار می‌گیرد. آزمون برابری میانگین، چندک و تابع قابلیت اعتماد برای  $K$  جمعیت بیرنجام-ساندرز بر اساس روش  $p$ -مقدار تعمیم یافته و دلتا مورد بررسی قرار می‌گیرد. مطالعات عددی حاصل از شبیه‌سازی نشان می‌دهد که روش دلتا دقیق‌تر بوده و عملکرد بهتری دارد.

**کلمات کلیدی:** توزیع بیرنجام-ساندرز،  $p$ -مقدار تعمیم یافته، روش دلتا

## ۱ پیش‌گفتار

توزیع دو پارامتری بیرنجام-ساندرز ( $B-S$ ) متعلق به خانواده توزیع‌های طول عمر می‌باشد و یکی از مهمترین توزیع‌های خانواده شکلی و مقیاسی است که برای داده‌های زمان شکست ناشی از گسترش ترک مورد استفاده قرار می‌گیرد.

**تعریف ۱.** با توجه به [۱] متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع بیرنجام-ساندرز با پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  است و با نماد  $X \sim B-S(\alpha, \beta)$  نشان داده می‌شود، اگر تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر باشد:

$$F(x) = \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right) \right] \quad x > 0$$

که در آن  $\alpha$  پارامتر شکل و  $\beta$  پارامتر مقیاس است.

<sup>۱</sup>tousiyan.v@gmail.com

<sup>۲</sup>kamel-abdollahnezhad@yahoo.com

**تعریف ۲.** با توجه به [۵] فرض کنید  $R = R(X; x, \theta, \delta)$  یک تابعی از  $X$  و  $x$  و  $\theta$  و  $\delta$  باشد، آنگاه  $R$  یک کمیت محوری تعمیم یافته گفته می شود اگر دو خاصیت زیر را داشته باشد:

۱. برای یک  $x$  داده شده، توزیع احتمال  $R$  وابسته به پارامترهای مجهول نباشد.

۲. مقدار مشاهده شده  $r_{obs} = R(X; x, \theta, \delta)$  به پارامتر مزاحم وابسته نباشد.

[۳] فرض کنید  $k$  جمعیت با توزیع  $B - S$  با پارامترهای  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) داشته باشیم. می خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم:

$$H_0 : g(\alpha_1, \beta_1) = \dots = g(\alpha_k, \beta_k) \quad (1)$$

$$H_1 : g(\alpha_i, \beta_i) \neq g(\alpha_j, \beta_j) \quad i \neq j (i, j = 1, \dots, k)$$

که در آن  $g(\cdot, \cdot)$  یک معادله دلخواه داده شده می باشد.

به عنوان مثال برای بررسی برابری میانگین  $k$  جمعیت می توانیم  $g(\cdot, \cdot)$  را به صورت زیر تعیین کنیم:

$$g(\alpha_i, \beta_i) = \beta_i \left( 1 + \frac{\alpha_i^2}{\beta_i} \right) = \mu_i$$

در اینجا  $g(\alpha_A, \beta_A) = (g(\alpha_1, \beta_1), \dots, g(\alpha_k, \beta_k))^T$  و  $\alpha_A = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T$  ،  $\beta_A = (\beta_1, \dots, \beta_k)^T$  قرار می دهیم و فرض فوق را به صورت ماتریسی بازنویسی می کنیم، بدین منظور ماتریس  $H$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}_{(k-1) \times k}$$

حال آزمون فرض (۱) را به صورت ماتریسی بازنویسی می کنیم.

$$H_0 : Hg(\alpha_A, \beta_A) = 0 \quad H_1 : Hg(\alpha_A, \beta_A) \neq 0 \quad (2)$$

در ادامه  $p$ - مقدار تعمیم یافته و روش دلتا را برای آزمون فرض فوق به کار می بریم.

## ۲ روش $p$ -مقدار تعمیم یافته

$p$ -مقدار تعمیم یافته برای آزمون فرض  $H_0 : \theta = \theta_0$  در برابر فرض مقابل  $H_1 : \theta \neq \theta_0$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$p = Pr\{|R(X; x, \theta, \delta)| \geq r_{obs} \mid \theta_0\} = Pr\{\|R(X; x, \theta, \delta)\|^2 \geq r_{obs}^2 \mid \theta_0\}.$$

اگر به ازای  $i = 1, \dots, k$  و  $j = 1, \dots, n_i$  یک نمونه‌ی تصادفی مستقل از  $k$  جامعه و  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  اندازه‌ی کل نمونه باشد، کمیت محوری تعمیم یافته برای  $\alpha_i$  و  $\beta_i$  به ترتیب  $T_{\alpha_i}$  و  $T_{\beta_i}$  می باشد که در [۴] به دست آمده است.

کمیت محوری برای  $g(\alpha_i, \beta_i)$  با نماد  $\tilde{g}_{\alpha_i, \beta_i} := \tilde{g}_{\alpha_i, \beta_i}(x_i; \tau_i, \nu_i) = g(T_{\alpha_i}, T_{\beta_i})$  که  $\tau_i \sim t(n_i - 1)$  و  $\nu_i \sim \chi^2(n_i)$  نشان داده می شود. بنابراین می توان یک کمیت محوری تعمیم یافته برای  $Hg(\alpha_A, \beta_A)$  را به صورت زیر به دست آورد:

$$T_{Hg} := H(\tilde{g}_{\alpha_1, \beta_1}, \dots, \tilde{g}_{\alpha_k, \beta_k})^T = H\tilde{g}_{\alpha_A, \beta_A} \quad (3)$$

حال کمیت محوری تعمیم یافته برای میانگین، چنک  $p$  - ام و تابع قابلیت اعتماد  $i$  - امین توزیع بیرنهام - ساندرز برابر است با:

$$G_{i,\mu} = T_{\beta_i}(x_{i;\tau})(1 + T_{\alpha_i}(x_{i;\nu}, \tau)^2/2)$$

$$G_{i,Q_p} = \frac{T_{\beta_i}(x_{i;\tau})}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{2 + [T_{\alpha_i}(x_{i;\nu}, \tau)\Phi^{-1}(p)]^2} + T_{\alpha_i}(x_{i;\nu}, \tau)\Phi^{-1}(p)\sqrt{(T_{\alpha_i}(x_{i;\nu}, \tau)\Phi^{-1}(p))^2 + 4} \right\}$$

$$G_{i,R(x)} = 1 - \Phi \left[ \frac{1}{T_{\alpha_i}(x_{i;\nu}, \tau)} \left( \sqrt{\frac{x}{T_{\beta_i}(x_{i;\tau})}} - \sqrt{\frac{T_{\beta_i}(x_{i;\tau})}{x}} \right) \right]$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳) امیدریاضی شرطی  $T_{Hg}$  برای  $x = (x_1^\tau, \dots, x_k^\tau)^\tau$  داده شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mu_{Hg} = E(T_{Hg} | x) = HE(\tilde{g}_{\alpha_A, \beta_A} | x) = H\{E(\tilde{g}_{\alpha_1, \beta_1} | x_1), \dots, E(\tilde{g}_{\alpha_k, \beta_k} | x_k)\}^\tau$$

همچنین، ماتریس کواریانس شرطی  $T_{Hg}$  برای  $x$  داده شده برابر است با:

$$\Sigma_{Hg} = Cov(T_{Hg} | x) = HCov(\tilde{g}(\alpha, \beta) | x)H^\tau$$

$$= Hdiag\{Var(\tilde{g}(\alpha_1, \beta_1) | x_1), \dots, Var(\tilde{g}(\alpha_k, \beta_k) | x_k)\}H^\tau$$

فرم استاندارد شده‌ی  $T_{Hg}$  برابر با  $\bar{T}_{Hg} = \Sigma_{Hg}^{-1/2}(T_{Hg} - \mu_{Hg})$  می‌باشد. برای  $x$  داده شده، توزیع  $\bar{T}_{Hg}$  به هیچ پارامتر مجهولی وابسته نمی‌باشد. از اینرو توزیع

$$\|\bar{T}_{Hg}\|^2 = \bar{T}_{Hg}^\tau \bar{T}_{Hg} = (T_{Hg} - \mu_{Hg})^\tau \Sigma_{Hg}^{-1}(T_{Hg} - \mu_{Hg})$$

نیز مستقل از هر پارامتر مجهولی است.

فرض کنید  $\tilde{\mu}_\cdot = \Sigma_{Hg}^{-1/2}(\cdot - \mu_{Hg}) = -\Sigma_{Hg}^{-1/2}\mu_{Hg}$  است.  $p$  - مقدار تعمیم یافته تحت فرض  $H$ . به صورت زیر می‌باشد:

$$p = P(\|\bar{T}_{Hg}\|^2 \geq \|\tilde{\mu}_\cdot\|^2) = P((T_{Hg} - \mu_{Hg})^\tau \Sigma_{Hg}^{-1}(T_{Hg} - \mu_{Hg}) \geq \mu_{Hg}^\tau \Sigma_{Hg}^{-1} \mu_{Hg})$$

زمانی فرض  $H$ . رد می‌شود که مقدار  $p$  کمتر از سطح  $\alpha$  باشد.

### ۳ روش دلتا

در [۲] برآوردگرهای اصلاح شده‌ی  $(\alpha_i, \beta_i)$  برابر است با:

$$\hat{\alpha}_i = \left\{ \sqrt{2 \left( \left[ \bar{x}_i \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^{-1} / n_i \right]^{1/2} - 1 \right)} \right\}^{1/2}, \quad \hat{\beta}_i = \left\{ \bar{x}_i \left( \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^{-1} / n_i \right)^{-1} \right\}^{1/2}$$

که در اینجا  $\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} / n_i$  می‌باشد. همچنین توزیع توأم مجانبی برآوردگرهای گشتاوری اصلاح شده  $\hat{\alpha}_i$  و  $\hat{\beta}_i$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\sqrt{n_i} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_i - \alpha_i \\ \hat{\beta}_i - \beta_i \end{pmatrix} \rightarrow N \left[ \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot / 5 \alpha_i^2 & \cdot \\ \cdot & \frac{(\alpha_i \beta_i)^2 (1 + \cdot / 5 \alpha_i^2)}{(1 + \cdot / 5 \alpha_i^2)^2} \end{pmatrix} \right]$$

روش دلتا به صورت زیر تعریف می شود؛

$$\sqrt{n_i}(g(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i) - g(\alpha_i, \beta_i)) \rightarrow N(0, \sigma_{gi}^2)$$

که

$$\sigma_{gi}^2 = \text{grad}_{\alpha_i, \beta_i}^t(g(\alpha_i, \beta_i)) \begin{pmatrix} 0.5\alpha_i^2 & \cdot \\ \cdot & \frac{(\alpha_i\beta_i)^2(1 + 0.75\alpha_i^2)}{(1 + 0.5\alpha_i^2)^2} \end{pmatrix} \text{grad}_{\alpha_i, \beta_i}(g(\alpha_i, \beta_i)) \quad (4)$$

و  $\text{grad}_{\alpha_i, \beta_i}(g(\alpha_i, \beta_i)) = (\partial g(\alpha_i, \beta_i)/\partial \alpha_i, \partial g(\alpha_i, \beta_i)/\partial \beta_i)^T$  فرض کنید می باشد.

$\tilde{n} = \max\{n_i, i = 1, \dots, k\}$ ،  $g(\alpha_A, \beta_A) = (g(\alpha_1, \beta_1), \dots, g(\alpha_k, \beta_k))^T$  و  $g(\hat{\alpha}_A, \hat{\beta}_A) = (g(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1), \dots, g(\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k))^T$  برای  $i = 1, \dots, k$   $0 < \lambda_i \leq 1$ ،  $\lambda_i = \lim_{\tilde{n} \rightarrow \infty} (n_i/\tilde{n})$  در نهایت منجر به ایجاد  $k$  نمونه مستقل می شود که از رابطه زیر پیروی می کنند؛

$$\sqrt{\tilde{n}}(g(\hat{\alpha}_A, \hat{\beta}_A) - g(\alpha_A, \beta_A)) \Rightarrow N(0, \Sigma_g)$$

که  $\Sigma_g = \text{diag}(\sigma_{g1}^2/\lambda_1, \dots, \sigma_{gk}^2/\lambda_k)$  از اینرو

$$\sqrt{\tilde{n}}(Hg(\hat{\alpha}_A, \hat{\beta}_A) - Hg(\alpha_A, \beta_A)) \Rightarrow N(0, H\Sigma_gH^T)$$

و

$$\tilde{n}(Hg(\hat{\alpha}_A, \hat{\beta}_A) - Hg(\alpha_A, \beta_A))^T (H\Sigma_gH^T)^{-1} (Hg(\hat{\alpha}_A, \hat{\beta}_A) - Hg(\alpha_A, \beta_A)) \Rightarrow \chi^2(K-1) \quad (5)$$

توجه کنید تحت فرض صفر، در رابطه (۵)،  $Hg(\alpha_A, \beta_A) = 0$  می باشد. در نتیجه آماره‌ی آزمون می تواند به صورت زیر تعریف شود؛

$$T_k = \tilde{n}g^T(\hat{\alpha}_A, \hat{\beta}_A)H^T(H\hat{\Sigma}_gH^T)^{-1}Hg(\hat{\alpha}_A, \hat{\beta}_A)$$

که  $\hat{\Sigma}_g = \text{diag}(\tilde{n}\hat{\sigma}_{g1}^2/n_1, \dots, \tilde{n}\hat{\sigma}_{gk}^2/n_k)$  یک برآوردگر  $\Sigma_g$  می باشد. علاوه بر این، زمانی که برآوردهای  $\hat{\alpha}_i$  و  $\hat{\beta}_i$  را در رابطه (۴) قرار دهیم، می توانیم برآورد  $\hat{\sigma}_{gi}^2$  را به دست آوریم.  $p$  - مقدار در روش دلتا برابر است با:

$$p = Pr(T_k \geq t_{k,obs}) = 1 - F_{\chi_{K-1}^2}(t_{k,obs})$$

که  $F_{\chi_{K-1}^2}(\cdot)$  معرف تابع توزیع تجمعی کای اسکویئر با  $K-1$  درجه آزادی می باشد.

حال کمیت های  $\text{grad}_{\alpha_i, \beta_i}(g(\alpha_i, \beta_i))$  و  $\sigma_{gi}^2$  برای میانگین، چنک  $p$  - ام و تابع قابلیت اعتماد به صورت زیر به دست می آید.

**میانگین:** زمانی که  $g(\alpha_i, \beta_i) = \beta_i(1 + \frac{1}{4}\alpha_i^2) = \mu_i$  باشد، خواهیم داشت؛

$$\text{grad}_{\alpha_i, \beta_i}(\mu(\alpha_i, \beta_i)) = (\alpha_i\beta_i, 1 + 0.5\alpha_i^2)^T$$

و  $\sigma_{gi}^2$  طبق رابطه (۴) برابر است با:

$$\sigma_{gi}^2 = \frac{1}{4}\alpha_i^4\beta_i^2 + (\alpha_i^2\beta_i^2)(1 + \frac{3}{4}\alpha_i^2) = (\alpha_i^2\beta_i^2)(1 + \frac{5}{4}\alpha_i^2)$$

**چنک  $p$  - ام** ( $0 < p < 1$ ): زمانی که  $g(\alpha_i, \beta_i) = Q_{p,i} = 0.5\beta_i\{2 + Z_i^2 + Z_i\sqrt{Z_i^2 + 4}\}$  با  $Z_i = \alpha_i\Phi^{-1}(p)$  باشد، داریم؛

$$\text{grad}_{\alpha_i, \beta_i}(Q_p(\alpha_i, \beta_i)) = \left( \frac{W_i}{\sqrt{Z_i^2 + 4}} (\gamma + Z_i^2 + Z_i \sqrt{Z_i^2 + 4}), \gamma/5 (\gamma + Z_i^2 + Z_i \sqrt{Z_i^2 + 4}) \right)^\tau$$

با  $W_i = \beta_i \Phi^{-1}(p)$  و در این مورد

$$\begin{aligned} \sigma_{g_i}^\gamma &= \left( \frac{\partial g(\alpha_i, \beta_i)}{\partial \alpha_i} \right)^\gamma \cdot \gamma/5 \alpha_i^\gamma + \left( \frac{\partial g(\alpha_i, \beta_i)}{\partial \beta_i} \right)^\gamma \cdot (\alpha_i \beta_i)^\gamma \cdot \frac{1 + \gamma/5 \alpha_i^\gamma}{(1 + \gamma/5 \alpha_i^\gamma)^\gamma} \\ &= \gamma/5 \alpha_i^\gamma (\gamma + Z_i^2 + Z_i \sqrt{Z_i^2 + 4}) \left[ \frac{W_i}{Z_i^2 + 4} + \gamma/5 \beta_i^\gamma \frac{1 + \gamma/5 \alpha_i^\gamma}{(1 + \gamma/5 \alpha_i^\gamma)^\gamma} \right] \end{aligned}$$

تابع قابلیت اعتماد: تابع مورد علاقه برابر است با

$$g(\alpha_i, \beta_i) = R_i(x) = 1 - \Phi[\alpha_i^{-1}(\sqrt{x \cdot / \beta_i} - \sqrt{\beta_i / x})]$$

$$\text{grad}_{\alpha_i, \beta_i}(R(\alpha_i, \beta_i, x)) = \left( \frac{Q_i}{\sqrt{2\pi} \alpha_i^\gamma} \left( \sqrt{\frac{x \cdot}{\beta_i}} - \sqrt{\frac{\beta_i}{x}} \right), \frac{Q_i}{\sqrt{2\pi} \alpha_i \beta_i} \left( \sqrt{\frac{x \cdot}{\beta_i}} + \sqrt{\frac{\beta_i}{x}} \right) \right)^\tau$$

$$\sigma_{g_i} = \frac{Q_i^\gamma}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{\alpha_i} \left( \sqrt{\frac{x \cdot}{\beta_i}} - \sqrt{\frac{\beta_i}{x}} \right) \right]^\gamma + \gamma/5 \left( \sqrt{\frac{x \cdot}{\beta_i}} + \sqrt{\frac{\beta_i}{x}} \right)^\gamma \frac{1 + \gamma/5 \alpha_i^\gamma}{(1 + \gamma/5 \alpha_i^\gamma)^\gamma} \right\}$$

با  $Q_i = \exp\{-\gamma/5 \alpha_i^{-\gamma} (\sqrt{x \cdot / \beta_i} - \sqrt{\beta_i / x})^\gamma\}$

## ۴ مطالعات شبیه‌سازی

با توجه به جداول ۱ و ۲، برای میانگین  $\mu$  و تابع قابلیت  $R(1/2)$ ، روش دلتا ( $T_k$ ) خطای نوع اول را بهتر کنترل می‌کند و توان بالاتری را نسبت به روش  $p$ -مقدار تعمیم یافته ( $G_k$ ) دارد. در مواردی مانند  $Q_{.1}$ ، اندازه شبیه‌سازی شده بر اساس  $G_k$  و  $T_k$ ، عملکرد و کارایی مشابهی را جهت حفظ سطح معنی‌داری دارند. بنابراین در اینجا روش دلتا توصیه می‌شود.

## مراجع

- [1] Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C., (1969a), A new family of life distributions, Journal of Applied Probability, 6, 319-327.
- [2] Ng, H. K. T., Kundu, D. and Balakrishnan, N., (2003), Modified moment estimation for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution, Journal of Comput. Statist. Data Anal. 43, 283-298.
- [3] Niu, C., Guo, X., Xu, W. and Zhu, L., (2014), Comparison of several Birnbaum-Saunders distributions, Journal of Statistical Computation and Simulation, 84, 2721-2733.
- [4] Wang, B. X., (2012), Generalized interval estimation for the Birnbaum-Saunders distribution, Journal of Comput. Stat. Data Anal, 56, 4320-4326.
- [5] Weerahandi, S., (2004), Generalized Inference in Repeated Measures: Exact Methods in MANOVA and Mixed Models. Wiley, New Jersey.

جدول ۱: اندازه شبیه‌سازی شده آزمون  $p$  - مقدار تعمیم یافته  $(G_k)$  و آزمون دلتا  $(T_k)$  در سطح عددی  $k = 3, \alpha^* = 0.05$ .

$T_k$			$G_k$			$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$
$R(1/2)$	$Q_{.1}$	$\mu$	$R(1/2)$	$Q_{.1}$	$\mu$		
$(n_1, n_2, n_3) = (40, 60, 80) \quad (n)$							
۰/۰۵۵	۰/۰۵۶	۰/۰۵۲	۰/۰۵۳	۰/۰۴۳	۰/۰۴۲	(۱,۱,۱)	(۰/۵,۰/۵,۰/۵)
۰/۰۵۸	۰/۰۵۷	۰/۰۵۴	۰/۰۴۰	۰/۰۵۱	۰/۰۴۴	(۲,۲,۲)	(۰/۴,۰/۴,۰/۴)
۰/۰۴۲	۰/۰۵۵	۰/۰۵۱	۰/۰۳۷	۰/۰۵۲	۰/۰۳۷	(۳,۳,۳)	(۰/۵,۰/۵,۰/۵)
۰/۰۵۷	۰/۰۵۲	۰/۰۵۲	۰/۰۴۶	۰/۰۵۲	۰/۰۳۸	(۳/۵,۳/۵,۳/۵)	(۰/۸,۰/۸,۰/۸)
$(n_1, n_2, n_3) = (60, 60, 60) \quad (n)$							
۰/۰۵۶	۰/۰۵۵	۰/۰۵۲	۰/۰۴۲	۰/۰۵۰	۰/۰۴۲	(۱,۱,۱)	(۰/۵,۰/۵,۰/۵)
۰/۰۵۷	۰/۰۵۷	۰/۰۵۴	۰/۰۴۲	۰/۰۵۳	۰/۰۴۱	(۲,۲,۲)	(۰/۴,۰/۴,۰/۴)
۰/۰۴۲	۰/۰۵۴	۰/۰۵۲	۰/۰۳۸	۰/۰۵۲	۰/۰۳۸	(۳,۳,۳)	(۰/۵,۰/۵,۰/۵)
۰/۰۵۵	۰/۰۴۹	۰/۰۵۲	۰/۰۴۳	۰/۰۵۲	۰/۰۳۹	(۳/۵,۳/۵,۳/۵)	(۰/۸,۰/۸,۰/۸)
$(n_1, n_2, n_3) = (60, 60, 80) \quad (n)$							
۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۵۳	۰/۰۵۵	۰/۰۵۱	۰/۰۵۰	(۱,۱,۱)	(۰/۵,۰/۵,۰/۵)
۰/۰۵۶	۰/۰۵۴	۰/۰۵۲	۰/۰۴۷	۰/۰۴۷	۰/۰۴۳	(۲,۲,۲)	(۰/۴,۰/۴,۰/۴)
۰/۰۴۱	۰/۰۵۳	۰/۰۵۲	۰/۰۴۰	۰/۰۴۷	۰/۰۴۰	(۳,۳,۳)	(۰/۵,۰/۵,۰/۵)
۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۴۵	۰/۰۵۳	۰/۰۴۱	(۳/۵,۳/۵,۳/۵)	(۰/۸,۰/۸,۰/۸)
$(n_1, n_2, n_3) = (70, 70, 70) \quad (n)$							
۰/۰۵۰	۰/۰۵۵	۰/۰۵۳	۰/۰۴۳	۰/۰۵۴	۰/۰۴۳	(۱,۱,۱)	(۰/۵,۰/۵,۰/۵)
۰/۰۵۳	۰/۰۵۳	۰/۰۵۲	۰/۰۴۹	۰/۰۴۵	۰/۰۴۶	(۲,۲,۲)	(۰/۴,۰/۴,۰/۴)
۰/۰۴۵	۰/۰۵۴	۰/۰۵۱	۰/۰۴۰	۰/۰۴۷	۰/۰۴۵	(۳,۳,۳)	(۰/۵,۰/۵,۰/۵)
۰/۰۵۴	۰/۰۵۲	۰/۰۴۸	۰/۰۴۶	۰/۰۴۶	۰/۰۴۲	(۳/۵,۳/۵,۳/۵)	(۰/۸,۰/۸,۰/۸)
$(n_1, n_2, n_3) = (80, 80, 80) \quad (n)$							
۰/۰۵۵	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۴۶	۰/۰۵۴	۰/۰۵۰	(۱,۱,۱)	(۰/۵,۰/۵,۰/۵)
۰/۰۵۳	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۴۳	(۲,۲,۲)	(۰/۴,۰/۴,۰/۴)
۰/۰۴۷	۰/۰۵۱	۰/۰۴۹	۰/۰۴۲	۰/۰۴۶	۰/۰۴۶	(۳,۳,۳)	(۰/۵,۰/۵,۰/۵)
۰/۰۵۲	۰/۰۵۰	۰/۰۵۰	۰/۰۴۷	۰/۰۴۹	۰/۰۴۵	(۳/۵,۳/۵,۳/۵)	(۰/۸,۰/۸,۰/۸)

جدول ۲: توان شبیه‌سازی شده آزمون  $p$ - مقدار تعمیم یافته  $(G_k)$  و آزمون دلتا  $(T_k)$  در سطح عددی  $k = ۳, \alpha^* = ۰/۰۵$ .

$T_k$			$G_k$			$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$
$R(1/2)$	$Q_{.1}$	$\mu$	$R(1/2)$	$Q_{.1}$	$\mu$		
$(n_1, n_2, n_3) = (40, 60, 80) \quad (n)$							
۰/۹۳۵	۰/۷۴۹	۰/۸۴۸	۰/۹۲۵	۰/۶۹۸	۰/۷۷۸	(۲.۲.۱/۲)	(۱.۱.۱)
۰/۹۹۸	۰/۹۴۷	۰/۹۸۷	۰/۹۹۸	۰/۹۳۲	۰/۹۷۰	(۲.۲.۱)	(۱.۱.۱)
۰/۳۶۴	۰/۹۰۱	۰/۵۹۰	۰/۳۴۳	۰/۹۰۲	۰/۳۵۷	(۲.۲.۲)	(۱.۱.۱/۸)
۰/۴۷۶	۰/۹۷۰	۰/۷۴۴	۰/۴۱۵	۰/۹۵۷	۰/۴۶۸	(۲.۲.۲)	(۱.۱.۲)
$(n_1, n_2, n_3) = (60, 60, 60) \quad (n)$							
۰/۹۰۵	۰/۷۲۷	۰/۸۳۵	۰/۸۹۴	۰/۶۷۵	۰/۷۴۰	(۲.۲.۱/۲)	(۱.۱.۱)
۰/۹۹۶	۰/۹۳۴	۰/۹۸۳	۰/۹۹۶	۰/۹۴۳	۰/۹۵۷	(۲.۲.۱)	(۱.۱.۱)
۰/۳۳۴	۰/۸۷۵	۰/۴۰۹	۰/۳۰۶	۰/۸۳۲	۰/۱۸۱	(۲.۲.۲)	(۱.۱.۱/۸)
۰/۴۳۵	۰/۹۸۴	۰/۵۵۳	۰/۳۸۷	۰/۹۴۶	۰/۲۳۷	(۲.۲.۲)	(۱.۱.۲)
$(n_1, n_2, n_3) = (60, 60, 80) \quad (n)$							
۰/۹۴۶	۰/۷۷۸	۰/۸۹۲	۰/۹۲۱	۰/۷۵۳	۰/۸۳۲	(۲.۲.۱/۲)	(۱.۱.۱)
۰/۹۹۹	۰/۹۶۸	۰/۹۹۳	۰/۹۹۸	۰/۹۵۳	۰/۹۸۲	(۲.۲.۱)	(۱.۱.۱)
۰/۴۰۳	۰/۹۲۳	۰/۶۱۷	۰/۳۳۱	۰/۹۱۱	۰/۳۶۵	(۲.۲.۲)	(۱.۱.۱/۸)
۰/۴۹۹	۰/۹۷۸	۰/۷۶۲	۰/۴۳۹	۰/۹۷۱	۰/۴۸۴	(۲.۲.۲)	(۱.۱.۲)
$(n_1, n_2, n_3) = (70, 70, 70) \quad (n)$							
۰/۹۴۳	۰/۷۸۱	۰/۸۹۰	۰/۹۳۲	۰/۷۴۱	۰/۸۱۳	(۲.۲.۱/۲)	(۱.۱.۱)
۰/۹۹۸	۰/۹۶۸	۰/۹۹۳	۰/۹۹۸	۰/۹۶۴	۰/۹۸۲	(۲.۲.۱)	(۱.۱.۱)
۰/۳۸۲	۰/۹۱۵	۰/۵۰۷	۰/۳۶۱	۰/۸۹۳	۰/۲۶۵	(۲.۲.۲)	(۱.۱.۱/۸)
۰/۴۹۴	۰/۹۶۸	۰/۶۷۳	۰/۴۷۶	۰/۹۶۴	۰/۳۷۴	(۲.۲.۲)	(۱.۱.۲)
$(n_1, n_2, n_3) = (80, 80, 80) \quad (n)$							
۰/۹۶۵	۰/۸۳۸	۰/۹۲۹	۰/۹۵۴	۰/۸۱۷	۰/۸۹۳	(۲.۲.۱/۲)	(۱.۱.۱)
۰/۹۹۹	۰/۹۸۳	۰/۹۹۸	۰/۹۹۹	۰/۹۷۱	۰/۹۹۳	(۲.۲.۱)	(۱.۱.۱)
۰/۴۲۵	۰/۹۳۶	۰/۶۰۲	۰/۳۸۳	۰/۹۲۷	۰/۳۹۱	(۲.۲.۲)	(۱.۱.۱/۸)
۰/۵۵۱	۰/۹۸۶	۰/۷۶۲	۰/۵۰۲	۰/۹۷۹	۰/۵۵۳	(۲.۲.۲)	(۱.۱.۲)